



**Коммерциялық емес
акционерлік қоғам**

**АЛМАТЫ
ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ
БАЙЛАНЫС
УНИВЕРСИТЕТІ**

Математикалық
модельдеу және
бағдарламалық
қамтамасыз ету
кафедрасы

**ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА**

5B070200 -Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша оқитын
студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға
арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Алматы 2017

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж.
Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. 5В070200 -
Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін
есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен
тапсырмалар. - Алматы: АЭЖБУ, 2017. - 43 б.

5В070200 -Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша оқитын
студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік
нұсқаулар мен тапсырмалар «Ықтималдықтар теориясы және математикалық
статистика» пәнінің №1, №2 типтік есептеулерден тұрады. Бағдарламаның
теориялық сұрақтары енгізілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Кестелер- 24, без.- 22, әдеб.көрсеткіші – 6 атау.

Рецензент: ЭР кафедрасының доценті Елеукулов Е.О.

«Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес
акционерлік қоғамының 2017 ж. жоспары бойынша басылды

© «Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2017 ж.

Кіріспе

Ықтималдық теориясы жаппай кездейсоқ құбылыстарға тән заңдылықтарды зерттейді. Ол математикалық статистика айналысатын кең ауқымды қолданбалы есептерге теориялық негіз болып табылады.

Сондықтан әдістемелік нұсқаулықтар есептеу-сызба жұмыстары екі бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімінде ықтималдық теориясының негізгі сұрақтары қарастырылса, екіншісінде - математикалық статистика сұрақтары.

Әрбір бөлімде теориялық сұрақтар, типтік варианттың тапсырмалары мен шешуі келтірілген.

Әр студенттің вариантының нөмірі топтың тізімі бойынша анықталады. Есептеу-сызба жұмыс оқушы дәптеріне анық орындалуы керек.

1 Есептік-сызба жұмыс №1. Ықтималдық теориясы элементтері

Мақсаты: кездейсоқ оқиғалар мен оның ықтималдығы туралы түсініктермен, ықтималдық теориясының негізгі теоремаларымен таныстыру. Заңдарын оқып, үйрену.

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Ықтималдық теориясы пәні. Кездейсоқ оқиғалар. Элементар оқиғалар кеңістігі. Оқиғалар алгебрасы.

2. Ықтималдықтың статистикалық, геометриялық және классикалық анықтамалары.

3. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары. Шартты ықтималдық.

4. Толық ықтималдықтар формуласы. Байес формуласы. Бернулли формуласы.

5. Лапласстың аймақтық және интегралдық теоремасы. Тәжірибенің қайталануы. Пуассона формуласы.

6. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы.

7. Интегралдық үлестірім функциясы. Үлестірім тығыздығы.

8. Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың математикалық үміті, дисперсиясы және орта квадраттық ауытқуы.

9. Биномдық үлестірім, Пуассон үлестірімі. Бірқалыпты және көрсеткіштік үлестірім, сенімділік функциясы.

10. Қалыпты үлестірім.

11. Шектік теоремалар туралы ұғым. Үлкен сандар заңы, орталық шектік теорема.

1.2 Есептік тапсырмалар

1. Көтерме қоймада үш сұрыпты өнім бар: n_1 - бірінші, n_2 - екінші сұрыпты өнім, n_3 - үшінші сұрыпты өнім ($\sum_i^3 n_i = n$).

Табу керек:

- а) бірінші сұрыпты өнімнің қатысты жиілігін;
- б) таңдап алынған m өнімнің барлығы бірінші сұрыпты болу ықтималдығын;
- в) таңдап алынған m өнімнің ішінде m_1 -і бірінші сұрыпты болу ықтималдығын;
- г) таңдап алынған m өнімнің ішінде m_1 -і бірінші сұрыпты, m_2 -і екінші сұрыпты, m_3 -і үшінші сұрыпты ($\sum_i^3 m_i = m$) болу ықтималдығын;
- д) таңдап алынған m өнімнің ішінде ең болмағанда біреуі бірінші сұрыпты болу ықтималдығын.

| № | n | n_1 | n_2 | n_3 | m | m_1 | m_2 | m_3 |
|------|-----|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|
| 1.1 | 70 | 20 | 26 | 24 | 5 | 2 | 1 | 2 |
| 1.2 | 75 | 40 | 20 | 15 | 8 | 4 | 1 | 3 |
| 1.3 | 85 | 35 | 30 | 20 | 5 | 2 | 1 | 2 |
| 1.4 | 90 | 20 | 40 | 30 | 7 | 2 | 2 | 3 |
| 1.5 | 87 | 30 | 45 | 12 | 8 | 3 | 2 | 3 |
| 1.6 | 100 | 25 | 55 | 20 | 15 | 8 | 3 | 4 |
| 1.7 | 90 | 40 | 24 | 26 | 9 | 4 | 3 | 2 |
| 1.8 | 95 | 28 | 42 | 25 | 10 | 3 | 5 | 2 |
| 1.9 | 85 | 30 | 15 | 40 | 7 | 2 | 2 | 3 |
| 1.10 | 90 | 17 | 33 | 40 | 6 | 1 | 3 | 2 |
| 1.11 | 85 | 31 | 25 | 29 | 5 | 2 | 2 | 1 |
| 1.12 | 75 | 28 | 32 | 15 | 5 | 1 | 2 | 2 |
| 1.13 | 100 | 30 | 41 | 29 | 9 | 3 | 4 | 2 |
| 1.14 | 80 | 32 | 28 | 20 | 7 | 3 | 2 | 2 |
| 1.15 | 85 | 24 | 26 | 35 | 5 | 1 | 3 | 1 |
| 1.16 | 100 | 41 | 29 | 30 | 10 | 5 | 3 | 2 |
| 1.17 | 90 | 29 | 21 | 40 | 12 | 6 | 4 | 2 |
| 1.18 | 85 | 25 | 35 | 25 | 7 | 2 | 2 | 3 |
| 1.19 | 80 | 18 | 42 | 20 | 5 | 1 | 2 | 2 |
| 1.20 | 95 | 43 | 27 | 25 | 9 | 3 | 4 | 2 |
| 1.21 | 70 | 22 | 28 | 20 | 9 | 2 | 4 | 3 |
| 1.22 | 80 | 30 | 21 | 29 | 7 | 3 | 1 | 1 |
| 1.23 | 90 | 42 | 20 | 28 | 6 | 1 | 3 | 2 |
| 1.24 | 75 | 24 | 26 | 25 | 8 | 2 | 4 | 2 |

| | | | | | | | | |
|------|-----|----|----|----|----|---|---|---|
| 1.25 | 100 | 37 | 33 | 30 | 10 | 2 | 3 | 5 |
| 1.26 | 90 | 26 | 34 | 30 | 8 | 3 | 2 | 3 |
| 1.27 | 80 | 31 | 29 | 20 | 5 | 1 | 2 | 2 |
| 1.28 | 95 | 29 | 31 | 35 | 8 | 3 | 2 | 3 |
| 1.29 | 96 | 34 | 26 | 36 | 7 | 4 | 1 | 2 |
| 1.30 | 89 | 25 | 35 | 29 | 5 | 1 | 2 | 2 |

2. Үш қару бір бірінен тәуелсіз нысанаға оқ атады. Нысанаға дөп тию ықтималдығы бірінші, екінші, үшінші қару үшін сәйкес p_1, p_2, p_3 . Келесі оқиғалардың ықтималдығын табу керек:

- үш қару нысанаға дөп тиеді;
- нысанаға тек біреуі дөп тиеді;
- нысанаға екеуі дөп тиеді, біреуі тигізе алмайды;
- ең болмағанда біреуі дөп тиеді.

| № | p_1 | p_2 | p_3 | № | p_1 | p_2 | p_3 | № | p_1 | p_2 | p_3 |
|------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|
| 2.1 | 0.9 | 0.6 | 0.5 | 2.11 | 0.5 | 0.9 | 0.4 | 2.21 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
| 2.2 | 0.8 | 0.7 | 0.6 | 2.12 | 0.7 | 0.8 | 0.5 | 2.22 | 0.6 | 0.5 | 0.8 |
| 2.3 | 0.7 | 0.5 | 0.8 | 2.13 | 0.5 | 0.7 | 0.6 | 2.23 | 0.7 | 0.9 | 0.7 |
| 2.4 | 0.6 | 0.9 | 0.8 | 2.14 | 0.4 | 0.6 | 0.7 | 2.24 | 0.8 | 0.4 | 0.6 |
| 2.5 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 2.15 | 0.5 | 0.5 | 0.8 | 2.25 | 0.9 | 0.5 | 0.5 |
| 2.6 | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 2.16 | 0.6 | 0.9 | 0.5 | 2.26 | 0.4 | 0.6 | 0.8 |
| 2.7 | 0.8 | 0.5 | 0.7 | 2.17 | 0.7 | 0.8 | 0.6 | 2.27 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
| 2.8 | 0.5 | 0.8 | 0.6 | 2.18 | 0.8 | 0.5 | 0.7 | 2.28 | 0.6 | 0.8 | 0.7 |
| 2.9 | 0.6 | 0.9 | 0.5 | 2.19 | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 2.29 | 0.7 | 0.9 | 0.5 |
| 2.10 | 0.7 | 0.9 | 0.4 | 2.20 | 0.9 | 0.4 | 0.9 | 2.30 | 0.8 | 0.9 | 0.4 |

3. Қоймаға үш партия лампа әкелінді: n_1 бірінші партиядан, n_2 екіншіден, n_3 үшіншіден ($\sum_i^3 n_i = 1000$). Бірінші партиядан $m_1\%$ сапасыз лампа бар, екіншісінде - $m_2\%$, үшіншісінде - $m_3\%$.

Табу керек:

- кез келген ретпен алынған лампаның сапасыз болу ықтималдығын табу керек;
- кез келген ретпен алынған лампаның сапасыз болып шықты. Осы лампаның i – ші партиядан болу ($i=1,2,3$) ықтималдығын.

| № | n_1 | n_2 | m_1 | m_2 | m_3 | i | № | n_1 | n_2 | m_1 | m_2 | m_3 | i |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 3.1 | 520 | 220 | 5 | 8 | 7 | 1 | 3.16 | 100 | 250 | 7 | 8 | 5 | 1 |
| 3.2 | 270 | 410 | 10 | 5 | 9 | 2 | 3.17 | 430 | 180 | 5 | 4 | 7 | 2 |
| 3.3 | 250 | 140 | 8 | 7 | 4 | 2 | 3.18 | 170 | 540 | 6 | 5 | 8 | 3 |
| 3.4 | 190 | 380 | 5 | 9 | 30 | 1 | 3.19 | 650 | 120 | 10 | 9 | 8 | 2 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|------|-----|-----|----|----|----|---|------|-----|-----|----|----|---|---|
| 3.5 | 290 | 610 | 6 | 3 | 3 | 2 | 3.20 | 400 | 180 | 7 | 10 | 5 | 1 |
| 3.6 | 270 | 430 | 10 | 6 | 4 | 2 | 3.21 | 120 | 380 | 10 | 6 | 9 | 2 |
| 3.7 | 280 | 360 | 7 | 10 | 9 | 1 | 3.22 | 270 | 340 | 9 | 5 | 4 | 3 |
| 3.8 | 520 | 110 | 5 | 7 | 10 | 1 | 3.23 | 430 | 120 | 10 | 7 | 6 | 2 |
| 3.9 | 240 | 290 | 9 | 8 | 4 | 3 | 3.24 | 360 | 120 | 5 | 10 | 8 | 1 |
| 3.10 | 310 | 410 | 7 | 2 | 5 | 3 | 3.25 | 420 | 210 | 8 | 7 | 6 | 1 |
| 3.11 | 520 | 110 | 3 | 6 | 7 | 2 | 3.26 | 370 | 130 | 10 | 6 | 5 | 2 |
| 3.12 | 280 | 310 | 9 | 8 | 4 | 2 | 3.27 | 410 | 200 | 5 | 10 | 8 | 3 |
| 3.13 | 400 | 320 | 4 | 5 | 8 | 1 | 3.28 | 280 | 510 | 10 | 6 | 5 | 3 |
| 3.14 | 350 | 240 | 9 | 8 | 7 | 1 | 3.29 | 710 | 120 | 2 | 10 | 4 | 3 |
| 3.15 | 190 | 520 | 5 | 2 | 4 | 3 | 3.30 | 460 | 240 | 5 | 9 | 7 | 1 |

4. A оқиғасының пайда болу ықтималдығы p -ға тең. n сынақта A оқиғасының:

а) дәл k_1 рет;

б) k_1 -ден кем емес;

в) k_2 -ден артық емес;

г) ең болмағанда бір рет (жұп нұсқалар үшін, мұндағы $n=10$);

д) k_1 ден k_2 ге дейін (тақ нұсқалар үшін, мұндағы $n=100$) болу ықтималдығын табу керек.

| № | k_1 | k_2 | p | № | k_1 | k_2 | p | № | k_1 | k_2 | p |
|------|-------|-------|-----|------|-------|-------|-----|------|-------|-------|------|
| 4.1 | 3 | 5 | 0.6 | 4.11 | 2 | 5 | 0.4 | 4.21 | 6 | 8 | 0.7 |
| 4.2 | 62 | 82 | 0.6 | 4.12 | 80 | 95 | 0.4 | 4.22 | 70 | 80 | 0.7 |
| 4.3 | 5 | 7 | 0.8 | 4.13 | 5 | 8 | 0.8 | 4.23 | 4 | 7 | 0.6 |
| 4.4 | 55 | 75 | 0.8 | 4.14 | 60 | 90 | 0.6 | 4.24 | 65 | 80 | 0.75 |
| 4.5 | 4 | 8 | 0.8 | 4.15 | 2 | 8 | 0.7 | 4.25 | 7 | 9 | 0.75 |
| 4.6 | 40 | 60 | 0.8 | 4.16 | 80 | 90 | 0.8 | 4.26 | 78 | 92 | 0.75 |
| 4.7 | 3 | 7 | 0.3 | 4.17 | 5 | 9 | 0.8 | 4.27 | 2 | 6 | 0.7 |
| 4.8 | 50 | 80 | 0.3 | 4.18 | 70 | 95 | 0.8 | 4.28 | 30 | 85 | 0.7 |
| 4.9 | 4 | 6 | 0.3 | 4.19 | 3 | 6 | 0.7 | 4.29 | 4 | 9 | 0.7 |
| 4.10 | 45 | 75 | 0.4 | 4.20 | 50 | 60 | 0.7 | 4.30 | 80 | 95 | 0.6 |

5. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген.

Табу керек:

а) үлестірім функциясын $F(x)$, оның графигін салу керек;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;

в) X -тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

| | X | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | a | b |
|------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|
| | P | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | p_6 | | |
| 5.1 | X | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 9 | -2 | 7 |
| | P | 0.05 | 0.15 | 0.3 | 0.25 | 0.15 | 0.1 | | |
| 5.2 | X | -3 | -2 | -1 | 0 | 2 | 4 | -1 | 3 |
| | P | 0.15 | 0.3 | 0.02 | 0.14 | 0.18 | 0.21 | | |
| 5.3 | X | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | -3 | 6 |
| | P | 0.3 | 0.14 | 0.16 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | | |
| 5.4 | X | -4 | -3 | -2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| | P | 0.2 | 0.08 | 0.23 | 0.27 | 0.12 | 0.1 | | |
| 5.5 | X | 1 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 3 | 8 |
| | P | 0.19 | 0.21 | 0.06 | 0.14 | 0.12 | 0.28 | | |
| 6.6 | X | -1 | 0 | 2 | 3 | 5 | 7 | -4 | 4 |
| | P | 0.26 | 0.14 | 0.07 | 0.2 | 0.03 | 0.3 | | |
| 5.7 | X | -2 | -1 | 0 | 3 | 5 | 7 | 1 | 6 |
| | P | 0.18 | 0.09 | 0.01 | 0.2 | 0.22 | 0.3 | | |
| 5.8 | X | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | 0 | 6 |
| | P | 0.3 | 0.17 | 0.13 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | | |
| 5.9 | X | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 9 | 5 | 8 |
| | P | 0.11 | 0.29 | 0.06 | 0.14 | 0.17 | 0.23 | | |
| 5.10 | X | 0 | 1 | 2 | 3 | 7 | 9 | 4 | 8 |
| | P | 0.06 | 0.14 | 0.3 | 0.25 | 0.15 | 0.1 | | |
| 5.11 | X | -3 | -2 | 0 | 1 | 2 | 4 | -1 | 3 |
| | P | 0.15 | 0.3 | 0.01 | 0.14 | 0.19 | 0.21 | | |
| 5.12 | X | -1 | 0 | 3 | 5 | 7 | 8 | 1 | 6 |
| | P | 0.25 | 0.14 | 0.16 | 0.1 | 0.2 | 0.15 | | |
| 5.13 | X | -4 | -3 | -2 | 0 | 2 | 4 | -1 | 3 |
| | P | 0.2 | 0.07 | 0.24 | 0.26 | 0.13 | 0.1 | | |
| 5.14 | X | -3 | -1 | 0 | 3 | 4 | 7 | -2 | 6 |
| | P | 0.12 | 0.09 | 0.01 | 0.2 | 0.28 | 0.3 | | |
| 5.15 | X | -1 | 0 | 1 | 3 | 7 | 8 | 2 | 6 |
| | P | 0.26 | 0.14 | 0.15 | 0.2 | 0.1 | 0.15 | | |
| 5.16 | X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 7 | -3 | 5 |
| | P | 0.17 | 0.09 | 0.01 | 0.3 | 0.23 | 0.2 | | |
| 5.17 | X | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 0 | 4 |
| | P | 0.1 | 0.14 | 0.16 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | | |
| 5.18 | X | -3 | -1 | 0 | 3 | 5 | 6 | -2 | 4 |
| | P | 0.16 | 0.09 | 0.01 | 0.3 | 0.24 | 0.2 | | |
| 5.19 | X | 1 | 2 | 5 | 6 | 7 | 8 | 3 | 6 |
| | P | 0.2 | 0.15 | 0.15 | 0.1 | 0.3 | 0.1 | | |
| 5.20 | X | -1 | 0 | 2 | 4 | 7 | 8 | 1 | 5 |
| | P | 0.23 | 0.18 | 0.12 | 0.2 | 0.1 | 0.17 | | |

| | | | | | | | | | |
|------|-----|------|------|------|------|------|------|----|---|
| 5.21 | X | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | 0 | 7 |
| | P | 0.3 | 0.14 | 0.16 | 0.03 | 0.2 | 0.17 | | |
| 5.22 | X | -4 | -3 | -1 | 0 | 1 | 3 | -2 | 2 |
| | P | 0.2 | 0.03 | 0.24 | 0.26 | 0.17 | 0.1 | | |
| 5.23 | X | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 9 | 0 | 8 |
| | P | 0.17 | 0.23 | 0.09 | 0.11 | 0.12 | 0.28 | | |
| 5.24 | X | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 2 | 6 |
| | P | 0.2 | 0.14 | 0.16 | 0.12 | 0.3 | 0.08 | | |
| 5.25 | X | -5 | -3 | -2 | 0 | 1 | 3 | -4 | 2 |
| | P | 0.2 | 0.06 | 0.21 | 0.29 | 0.14 | 0.1 | | |
| 5.26 | X | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 9 | 4 | 7 |
| | P | 0.18 | 0.22 | 0.05 | 0.15 | 0.12 | 0.28 | | |
| 5.27 | X | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 2 | 6 |
| | P | 0.3 | 0.16 | 0.14 | 0.01 | 0.2 | 0.19 | | |
| 5.28 | X | -5 | -3 | -1 | 0 | 1 | 3 | -4 | 2 |
| | P | 0.1 | 0.03 | 0.14 | 0.36 | 0.17 | 0.2 | | |
| 5.29 | X | 0 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 1 | 7 |
| | P | 0.26 | 0.14 | 0.05 | 0.15 | 0.12 | 0.28 | | |
| 5.30 | X | -1 | 0 | 2 | 3 | 7 | 8 | 1 | 6 |
| | P | 0.21 | 0.16 | 0.14 | 0.1 | 0.2 | 0.19 | | |

6. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығы мен $f(x)$ берілген. Табу керек:

а) $F(x)$ үлестірім функциясын;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек. $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

| № | $f(x)$ | a | b | № | $f(x)$ | a | b |
|-----|--|------|-----------------|------|---|-----|------------------|
| 6.1 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 4 \\ \frac{x}{8}, 0 < x \leq 4 \end{cases}$ | 1 | 3 | 6.16 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 3 \\ \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{3}\right), 0 < x \leq 3 \end{cases}$ | -1 | 2 |
| 6.2 | $\begin{cases} 0, x \leq -3, x > -2 \\ \frac{6}{x^2}, -3 < x \leq -2 \end{cases}$ | -2,5 | 0 | 6.17 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 4 \sin 2x, 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ |
| 6.3 | $\begin{cases} 0, x \leq -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \\ 0,5 \cos x, -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | 6.18 | $\begin{cases} 0, x \leq 1, x > 2 \\ \frac{2}{x^2}, 1 < x \leq 2 \end{cases}$ | 0 | 1,5 |

| | | | | | | | |
|------|---|-----------------|----------------------|------|--|------------------|------------------|
| 6.4 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 1 \\ \frac{4}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \leq 1 \end{cases}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 6.19 | $\begin{cases} 0, x \leq 2, x > 3 \\ \frac{2x}{5}, 2 < x \leq 3 \end{cases}$ | 1 | 2,5 |
| 6.5 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 3/4 \\ \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, 0 < x \leq 3/4 \end{cases}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 6.20 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ | 0,1 | 1 |
| 6.6 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \pi \\ 0,5 \sin x, 0 < x \leq \pi \end{cases}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | 6.21 | $\begin{cases} 0, x \leq -1, x > 2 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, -1 < x \leq 2 \end{cases}$ | 0 | 1 |
| 6.7 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 2 \\ \frac{x+2}{6}, 0 < x \leq 2 \end{cases}$ | 1 | 2 | 6.22 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |
| 6.8 | $\begin{cases} 0, x \leq 4, x > 5 \\ \frac{2x}{9}, 4 < x \leq 5 \end{cases}$ | 3 | 4,5 | 6.23 | $\begin{cases} 0, x \leq 3, x > 5 \\ \frac{7,5}{x^2}, 3 < x \leq 5 \end{cases}$ | 2 | 4 |
| 6.9 | $\begin{cases} 0, x \leq \frac{\pi}{2}, x > \frac{5\pi}{6} \\ -2 \cos x, \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{6} \end{cases}$ | 0 | $\frac{2\pi}{3}$ | 6.24 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 6 \sin 3x, 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ |
| 6.10 | $\begin{cases} 0, x \leq 1, x > 2 \\ 3(x-1)^2, 1 < x \leq 2 \end{cases}$ | 1,5 | 2 | 6.25 | $\begin{cases} 0, x \leq 1, x > 2 \\ 2x-2, 1 < x \leq 2 \end{cases}$ | 0 | 1,5 |
| 6.11 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{4} \\ 2 \cos 2x, 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{4}$ | 6.26 | $\begin{cases} 0, x \leq -2, x > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2}, -2 < x \leq 2 \end{cases}$ | 0 | 1 |
| 6.12 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 4 \\ \frac{1}{2}(1-\frac{x}{4}), 0 < x \leq 4 \end{cases}$ | 1 | 3 | 6.27 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 5 \\ \frac{2}{5}(1-\frac{x}{5}), 0 < x \leq 5 \end{cases}$ | 1 | 4 |
| 6.13 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 2 \\ \frac{x+1}{4}, 0 < x \leq 2 \end{cases}$ | -1 | 1 | 6.28 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 3 \cos 3x, 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{9}$ |
| 6.14 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 1 \\ 3x^2, 0 < x \leq 1 \end{cases}$ | 0,2 | 1,2 | 6.29 | $\begin{cases} 0, x \leq -3, x > 3 \\ \frac{1}{2\pi} \sqrt{9-x^2}, -3 < x \leq 3 \end{cases}$ | 0 | 2 |
| 6.15 | $\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{3} \\ 2 \sin x, 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | 6.30 | $\begin{cases} 0, x \leq 1, x > 4 \\ \frac{2x}{15}, 1 < x \leq 4 \end{cases}$ | 2 | 3 |

7. N өнімді сенімділікке тексеру сынығы жүргізілуде. Әрбір өнімнің сынақты өтпеуінің ықтималдығы $m\%$ -ды құрайды. Сынақты өтпеген өнім санының үлестірім заңын құру керек (X кездейсоқ шамасы). Осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын табу керек.

| № | N | m | № | N | m | № | N | m |
|------|-----|-----|------|-----|-----|------|-----|-----|
| 7.1 | 3 | 10 | 7.11 | 4 | 15 | 7.21 | 3 | 11 |
| 7.2 | 2 | 12 | 7.12 | 5 | 13 | 7.22 | 2 | 16 |
| 7.3 | 4 | 20 | 7.13 | 3 | 14 | 7.23 | 4 | 29 |
| 7.4 | 5 | 25 | 7.14 | 2 | 20 | 7.24 | 5 | 10 |
| 7.5 | 3 | 30 | 7.15 | 4 | 27 | 7.25 | 3 | 17 |
| 7.6 | 2 | 10 | 7.16 | 5 | 20 | 7.26 | 2 | 21 |
| 7.7 | 4 | 15 | 7.17 | 3 | 19 | 7.27 | 4 | 22 |
| 7.8 | 5 | 17 | 7.18 | 2 | 23 | 7.28 | 5 | 24 |
| 7.9 | 3 | 12 | 7.19 | 4 | 11 | 7.29 | 3 | 18 |
| 7.10 | 2 | 15 | 7.20 | 5 | 28 | 7.30 | 2 | 22 |

8. Аппарат N элементтен тұрады. Бір элементтің бір жыл бойына істен шығу ықтималдығы p -ға тең және қалған элементтердің жағдайынан тәуелсіз.

Табу керек:

- а) істен шыққан элементтер санының үлестірім заңын құрастыру керек;
- б) жылына m -нен кем емес элементтің істен шығу ықтималдығы қандай?

| № | N | m | p | № | N | m | p | № | N | m | p |
|------|------|-----|-------|------|------|-----|-------|------|------|-----|-------|
| 8.1 | 2000 | 4 | 0,001 | 8.11 | 1500 | 6 | 0,005 | 8.21 | 1000 | 6 | 0,005 |
| 8.2 | 1000 | 5 | 0,007 | 8.12 | 4000 | 2 | 0,006 | 8.22 | 4500 | 2 | 0,003 |
| 8.3 | 3000 | 7 | 0,004 | 8.13 | 8000 | 2 | 0,001 | 8.23 | 2000 | 4 | 0,001 |
| 8.4 | 2000 | 5 | 0,002 | 8.14 | 6500 | 6 | 0,002 | 8.24 | 1000 | 5 | 0,007 |
| 8.5 | 1000 | 6 | 0,005 | 8.15 | 3000 | 2 | 0,005 | 8.25 | 3000 | 7 | 0,004 |
| 8.6 | 5000 | 2 | 0,001 | 8.16 | 1500 | 3 | 0,002 | 8.26 | 2000 | 5 | 0,002 |
| 8.7 | 2000 | 4 | 0,001 | 8.17 | 2000 | 4 | 0,001 | 8.27 | 1000 | 6 | 0,005 |
| 8.8 | 1500 | 5 | 0,008 | 8.18 | 1000 | 5 | 0,007 | 8.28 | 6500 | 8 | 0,007 |
| 8.9 | 3500 | 7 | 0,004 | 8.19 | 3500 | 1 | 0,002 | 8.29 | 7000 | 6 | 0,002 |
| 8.10 | 2000 | 2 | 0,003 | 8.20 | 2000 | 5 | 0,001 | 8.30 | 5500 | 9 | 0,004 |

9 а. 1-15 нұсқалары.

Өлшегіш құрал бағасы a -ға тең бөлікке бөлінген. Құралдың көрсеткіші жақын бүтін бөлікке дейін жуықталады. X кездейсоқ шамасы – жуықтау қателігі.

Табу керек:

- а) оның үлестірім тығыздығын $f(x)$;
- б) үлестірім функциясын $F(x)$;

- в) математикалық үмітін, дисперсиясын;
 г) есептегенде m -нен кем (артық) қате кету ықтималдығын.
 $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

9 б. 16 – 30 нұсқалары.

Метро пойыздары тек кесте бойынша ғана жүреді. Жүру интервалы a минут. X кездейсоқ шамасы – пойызды күту уақыты.

Табу керек:

- а) оның үлестірім тығыздығын $f(x)$;
 б) үлестірім функциясын $F(x)$;
 в) математикалық үмітін, дисперсиясын;
 г) аялдамаға келген жолаушы пойызды m минуттен кем (артық) күту ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

| № | a | m | № | a | m | № | a | m |
|------|-----|------|------|-----|------|------|-----|-----|
| 9.1 | 0,2 | 0,04 | 9.11 | 0,3 | 0,08 | 9.21 | 19 | 8 |
| 9.2 | 0,3 | 0,02 | 9.12 | 0,6 | 0,01 | 9.22 | 20 | 5 |
| 9.3 | 0,1 | 0,06 | 9.13 | 0,9 | 0,06 | 9.23 | 25 | 5 |
| 9.4 | 0,5 | 0,01 | 9.14 | 0,5 | 0,05 | 9.24 | 9 | 3 |
| 9.5 | 0,6 | 0,05 | 9.15 | 0,8 | 0,07 | 9.25 | 14 | 7 |
| 9.6 | 0,9 | 0,02 | 9.16 | 5 | 3 | 9.26 | 18 | 9 |
| 9.7 | 0,1 | 0,08 | 9.17 | 10 | 4 | 9.27 | 24 | 8 |
| 9.8 | 0,7 | 0,01 | 9.18 | 15 | 5 | 9.28 | 6 | 3 |
| 9.9 | 0,4 | 0,06 | 9.19 | 6 | 2 | 9.29 | 12 | 6 |
| 9.10 | 0,5 | 0,07 | 9.20 | 20 | 10 | 9.30 | 16 | 8 |

10. Элементтің мүлтіксіз жұмыс істеу уақыты (T кездейсоқ шамасы) λ параметрімен көрсеткішті үлестірілген, мұндағы λ - істен шығу интенсивтілігі, яғни бірлік уақыт ішіндегі істен шығудың орта саны.

Табу керек:

- а) үлестірім тығыздығын $f(t)$;
 б) үлестірім функциясын $F(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;
 в) сенімділік функциясын $R(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;
 г) математикалық үмітін, дисперсиясын;
 д) элементтің t уақыт ішінде істен шығу ықтималдығын және элементтің t уақыт ішінде істен шықпау ықтималдығын.

$F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

| № | λ | t | № | λ | t | № | λ | t |
|------|-----------|-----|-------|-----------|-----|-------|-----------|-----|
| 10.1 | 1 | 5 | 10.11 | 2 | 5 | 10.21 | 3 | 8 |

| | | | | | | | | |
|-------|----|----|-------|----|----|-------|----|----|
| 10.2 | 2 | 10 | 10.12 | 3 | 10 | 10.22 | 4 | 4 |
| 10.3 | 3 | 6 | 10.13 | 4 | 6 | 10.23 | 6 | 3 |
| 10.4 | 4 | 8 | 10.14 | 6 | 8 | 10.24 | 7 | 2 |
| 10.5 | 6 | 4 | 10.15 | 7 | 4 | 10.25 | 8 | 1 |
| 10.6 | 7 | 3 | 10.16 | 8 | 3 | 10.26 | 9 | 10 |
| 10.7 | 8 | 2 | 10.17 | 9 | 2 | 10.27 | 10 | 6 |
| 10.8 | 9 | 1 | 10.18 | 10 | 1 | 10.28 | 1 | 7 |
| 10.9 | 10 | 7 | 10.19 | 1 | 10 | 10.29 | 2 | 8 |
| 10.10 | 1 | 9 | 10.20 | 2 | 6 | 10.30 | 3 | 2 |

11. Өнімнің өлшеміннің номиналдан кездейсоқ ауытқуы (X кездейсоқ шамасы) a және σ параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) $(\alpha; \beta)$ аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ -дан аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

| № | a | σ | α | β | δ | № | a | σ | α | β | δ |
|-------|-----|----------|----------|---------|----------|-------|-----|----------|----------|---------|----------|
| 11.1 | 10 | 1 | 8 | 14 | 2 | 11.16 | 10 | 2 | 9 | 14 | 2 |
| 11.2 | 12 | 2 | 7 | 14 | 3 | 11.17 | 12 | 4 | 5 | 14 | 3 |
| 11.3 | 14 | 3 | 10 | 15 | 5 | 11.18 | 14 | 1 | 9 | 15 | 5 |
| 11.4 | 11 | 5 | 9 | 12 | 3 | 11.19 | 11 | 6 | 8 | 12 | 3 |
| 11.5 | 13 | 2 | 6 | 13 | 2 | 11.20 | 13 | 4 | 6 | 17 | 2 |
| 11.6 | 12 | 3 | 7 | 15 | 4 | 11.21 | 12 | 9 | 8 | 15 | 4 |
| 11.7 | 10 | 2 | 8 | 17 | 2 | 11.22 | 10 | 3 | 6 | 17 | 2 |
| 11.8 | 12 | 4 | 6 | 14 | 6 | 11.23 | 12 | 5 | 6 | 13 | 6 |
| 11.9 | 14 | 6 | 11 | 19 | 5 | 11.24 | 14 | 2 | 12 | 19 | 5 |
| 11.10 | 15 | 5 | 8 | 12 | 3 | 11.25 | 15 | 3 | 4 | 12 | 3 |
| 11.11 | 17 | 4 | 6 | 14 | 2 | 11.26 | 17 | 1 | 5 | 14 | 2 |
| 11.12 | 12 | 5 | 7 | 18 | 4 | 11.27 | 12 | 4 | 9 | 18 | 4 |
| 11.13 | 18 | 5 | 6 | 12 | 3 | 11.28 | 11 | 3 | 4 | 12 | 3 |
| 11.14 | 10 | 4 | 6 | 15 | 2 | 11.29 | 17 | 2 | 5 | 19 | 5 |
| 11.15 | 12 | 3 | 5 | 18 | 4 | 11.30 | 13 | 5 | 6 | 18 | 3 |

1.3 Типтік варианттың шешуі

1. Көтерме қоймада үш сұрыпты өнімдер бар: 40 - бірінші, 50 – екінші, 30 – үшінші сұрыпты өнімдер (барлығы 120 өнім).

Табу керек:

- а) бірінші сұрыпты өнімнің қатысты жиілігін;
 б) 20 алынған өнімнің барлығы бірінші сұрыпты өнім болу ықтималдығын;
 в) 20 алынған өнімнің 9 бірінші сұрыпты өнім болу ықтималдығын;
 г) алынған 20 шарлар арасында 9- бірінші, 6 - екінші, 5 - үшінші сұрыпты өнім болу ықтималдығын табу керек;
 д) алынған 20 шарлардың ішінде ең болмағанда біреуі бірінші сұрыпты өнім болу ықтималдығын.

Шешуі:

а) A оқиғасының қатысты жиілігі деп (белгіленуі $P^*(A)$) A оқиғасы пайда болған сынақ санының m барлық сынақтың жалпы санына n қатынасы айтылады: $P^*(A) = m/n$.

A оқиғасы – бірінші сұрыпты өнім таңдау болсын, онда $P^*(A) = 40/120 = 1/3$;

Қалған пункттерінде ықтималдығының классикалық анықтамасын қолданамыз: $P(A) = m/n$, мұндағы m – A оқиғасының пайда болуына қолайлы сынақтар саны, n – сынақтардың жалпы саны;

б) A – 20 алынған өнімнің барлығы бірінші сұрыпты өнім болсын. Элементар оқиғалардың жалпы саны 120 өнім арасында 20 өнім таңдап алудың мүмкін әртүрлі тәсілдер санына тең, яғни $n = C_{120}^{20}$; қолайлы оқиғалар саны 40 өнім арасында 20 бірінші сұрыпты өнім алу жолдар санына тең, яғни $m = C_{40}^{20}$. Сонымен, $P(A) = m/n = C_{40}^{20} / C_{120}^{20} = 4,679 \times 10^{-12}$;

в) A – 20 таңдап алынған өнім арасынан 9-ы бірінші сұрыпты өнім болсын. Жоғарыда айтылғандай, $n = C_{120}^{20}$. m – A оқиғасына қолайлы оқиғалар саны комбинаторика ережелерінің біреуімен табылады: n элементті жиында s ішкі жиын бар болсын. Ішкі жиындар сәйкес n_1, n_2, \dots, n_s элементтен тұрсын ($\sum_{i=1}^s n_i = n$). Онда бұл жиыннан таңдау мына сұлба бойынша жүрсе: m_1

элементті n_1 элементтен, m_2 -ні n_2 элементтен, ..., m_s -ті n_s элементтен таңдаса, онда m_1, m_2, \dots, m_s элементтен (әрқайсысында ретін ескермегенде) s тобының пайда болуының жалпы саны N мына формуламен есептелінеді: $N = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_s}^{m_s}$. Сонымен, біздің жағдайда $m = C_{40}^9 \cdot C_{80}^{11}$, мұнда C_{40}^9 – 40 бірінші сұрыпты өнім арасынан 9 бірінші сұрыпты өнім таңдап алудың әртүрлі мүмкін жағдайлар саны, ал C_{80}^{11} – 80 бірінші сұрыпты емес өнімнің арасынан 11 бірінші сұрыпты емес өнім таңдап алудың әртүрлі мүмкін жағдайлар саны. Олай болса, $P(A) = m/n = C_{40}^9 \cdot C_{80}^{11} / C_{120}^{20} = 0,097$;

г) A – алынған 20 өнімдер арасында 9- бірінші, 6 - екінші, 5 – үшінші сұрыпты өнім болу оқиғасы болсын. Бұл есепті шешу үшін A оқиғасының ықтималдығының классикалық анықтамасын қолданамыз: $P(A) = m/n$, мұндағы n – 120 өнім арасында 20 бірінші бірінші сұрыпты өнім таңдап алудың мүмкін әртүрлі тәсілдер санына тең, яғни $n = C_{120}^{20}$. A оқиғасына

қолайлы оқиғалар саны m жоғарыда келтірілген комбинаторика ережесі бойынша табылады, яғни $m = C_{40}^9 \cdot C_{50}^4 \cdot C_{30}^5$. Сондықтан $P(A) = m/n = 0,021$;

д) A - алынған 20 өнім ішінде ең болмағанда біреуі бірінші бірінші сұрыпты өнім болу оқиғасы болсын, онда қарама-қарсы оқиға \bar{A} - алынған 20 өнімнің ішінде ешқайсысы бірінші сұрыпты өнім болмайды. б) жағдайындағы сияқты бұл оқиғаның ықтималдығын келесі формула бойынша есептейміз $P(\bar{A}) = m/n = C_{80}^{20}/C_{120}^{20} = 1,2 \times 10^{-4}$. Онда A оқиғасының ықтималдығы $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 1,2 \times 10^{-4} \approx 1$, т.е. бұл оқиғаны ақиқат оқиға деуге болады.

Теру санын есептегенде Mathcad-та combin функциясы қолданылды. Төменде combin(Q,R) қолданушының C(Q,R) функциясы ретінде енгізілген файлдың көшірмесі келтірілген, ол Q мен R-дің кез келген мәндерінде орынды.

$$\begin{array}{l}
 C(40,9) = 2.734 \times 10^8 \\
 C(120,20) = 2.946 \times 10^{22} \\
 \frac{C(80,20)}{C(120,20)} = 1.2 \times 10^{-4} \\
 \frac{C(40,9) \cdot C(50,6) \cdot C(30,5)}{C(120,20)} = 0.021 \\
 C(Q,R) := \text{combin}(Q,R) \\
 C(80,11) = 1.048 \times 10^{13} \\
 C(40,20) = 1.378 \times 10^{11} \\
 \frac{C(40,9) \cdot C(80,11)}{C(120,20)} = 0.097
 \end{array}$$

2. Үш қару нысанаға оқ атады. Нысанаға дөп тию ықтималдығы бірінші, екінші, үшінші қару үшін сәйкес 0,75, 0,8, 0,9. Келесі оқиғалардың ықтималдығын табу керек:

- үш қару нысанаға дөп тиеді;
- нысанаға тек біреуі дөп тиеді;
- нысанаға екеуі дөп тиеді, біреуі тигізе алмайды;
- ең болмағанда біреуі дөп тиеді.

Шешуі: келесі оқиғалар енгіземіз: A_1 – нысанаға бірінші қарудың дөп тиюі, A_2 – екінші, A_3 – үшінші. Шарт бойынша $P(A_1)=0,75$, $P(A_2)=0,8$, $P(A_3)=0,9$.

а) A – барлық үш қару нысанаға дөп тию оқиғасы болсын, сонда $A = A_1 A_2 A_3$ және A_1, A_2, A_3 тәуелсіз оқиғалар болғандықтан, $P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,75 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,54$;

б) B – тек бір қарудың нысанаға дөп тию оқиғасы болсын, сонда $B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$, мұндағы $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ - A_1, A_2, A_3 оқиғаларына қарама-қарсы оқиғалар, яғни сәйкес бірінші, екінші, үшінші қарудың тимеуі. $P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,75 = 0,25$, $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,8 = 0,2$, $P(\bar{A}_3) = 1 - P(A_3) =$

$= 1 - 0,9 = 0,1$. Қосылғыштар тәуелсіз оқиғалар болғандықтан,
 $P(B) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = 0,75 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,08$;

в) C - екі қарудың нысанаға дөп тию оқиғасы болсын, яғни біреуі нысынаға тимейді, $C = A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3$. Оның ықтималдығы да алдыңғы пункттегідей есептелінеді:

$$P(C) = 0,75 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,75 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,3456;$$

г) D - ең болмағанда біреуі дөп тию оқиғасы болсын. Қарама-қарсы оқиғаны қарастырамыз: \bar{D} - үшеуі де нысынаға тимеді. $\bar{D} = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ болғандықтан, $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = 1 - 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,995$.

3. Қоймаға үш партия лампа әкелінді: $n_1 = 100$ бірінші партиядан, $n_2 = 300$ екіншіден, $n_3 = 1000 - n_1 - n_2 = 600$ үшіншіден ($\sum_i^3 n_i = 1000$). Бірінші партиядан 5% , екіншісінде – 4% , үшіншісінде - 6% сапасыз лампа бар.

Табу керек:

а) кез келген ретпен алынған лампаның сапасыз болу ықтималдығын табу керек;

б) кез келген ретпен алынған лампаның сапасыз болып шықты. Осы лампаның екінші партиядан болу ($i = 1, 2, 3$) ықтималдығын табу керек.

Шешуі: A – кез келген ретпен алынған лампаның сапасыз болу оқиғасы болсын, ал B_1, B_2, B_3 – лампа сәйкес бірінші, екінші, үшінші партиядан алынған оқиғалары болсын (бұл оқиғалар гипотезалар деп аталады).

а) A оқиғасының ықтималдығы толық ықтималдықтар формуласымен есептелінеді:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3),$$

мұндағы $P(A/B_i)$ – сатып алынған лампа i -ші партиядан алынған оқиғасының шартты ықтималдығы ($i = 1, 2, 3$). Есептің шарты бойынша:

$$P(B_1) = 100/1000 = 0,1; \quad P(B_2) = 300/1000 = 0,3; \quad P(B_3) = 600/1000 = 0,6;$$

$$P(A/B_1) = 0,05; \quad P(A/B_2) = 0,04; \quad P(A/B_3) = 0,06.$$

$$\text{Сондықтан } P(A) = 0,1 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,6 \cdot 0,06 = 0,053;$$

б) бұл пунктте $P(B_2/A)$ шартты ықтималдығын табу керек. Ол үшін Байес формуласын қолданамыз:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A/B_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

біздің есеп үшін ол былай жазылынады

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2 / A)P(A / B_2)}{\sum_{k=1}^3 P(B_k)P(A / B_k)}$$

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2)P(A / B_2)}{P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2) + P(B_3)P(A / B_3)} = \frac{0,3 \cdot 0,04}{0,053} = 0,226.$$

4. A оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,8-ге тең. n сынақта A оқиғасының:

а) дәл k_1 рет (A оқиғасы);

б) k_1 -ден кем емес (B оқиғасы);

в) k_2 -ден артық емес (C оқиғасы);

г) ең болмағанда бір рет (жұп нұсқалар үшін, мұндағы $n=10$) (D оқиғасы);

д) k_1 ден k_2 ге дейін (тақ нұсқалар үшін, мұндағы $n=100$) болу ықтималдығын табу керек (E оқиғасы).

Шешуі: бұл есепте қандай да бір оқиғаның n тәуелсіз оқиғалар арасынын k рет пайда болу ықтималдығын бар формулалары қолданылады, ол $P_n(k)$ деп белгіленеді. Есептің шартына байланысты оның шешімін әртүрлі жолмен қарастырады:

1) $n = 10$, $k_1 = 9$, $k_2 = 2$ болсын (тақ нұсқалар үшін). Бұл жерде n үлкен емес, сондықтан A оқиғасының ықтималдығын анықтау үшін Бернуллі формуласын қолданамыз: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, мұндағы $q = 1 - p$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

В және C оқиғаларының ықтималдығы ықтималдықтардың қосындысы ретінде анықталады: $P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$ – бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен кем емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе k рет, немесе $k+1$ рет, ..., немесе n рет; $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$ – бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен артық емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе 0 рет, немесе 1 рет, немесе 2 рет, ..., немесе k рет. Бұл оқиғалар кумулятивті (жинақталған) деп аталады. Сонымен,

$$а) P(A) = P_{10}(9) = C(10, 9) \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 0,268 ;$$

$$б) P(B) = P_{10}(9) + P_{10}(10) = 1,246 \times 10^{-9} ;$$

$$в) P(C) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) = 0,96 ;$$

г) на қарама қарсы \bar{D} оқиғасын енгіземіз – бұл 10 тәуелсіз сынықтарда D оқиғасының мүлдем пайда болмауы. Онда

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P_{10}(0) \approx 0,566.$$

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$C(Q, R) := \text{combin}(Q, R)$$

$$C(10, 9) \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 0,268$$

$$C(10, 9) \cdot 0.08^9 \cdot 0.92^1 + C(10, 10) \cdot 0.08^{10} \cdot 0.92^0 = 1.246 \times 10^{-9}$$

$$C(10, 0) \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{10} + C(10, 1) \cdot 0.08^1 \cdot 0.92^9 + C(10, 2) \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^8 = 0.96$$

$$1 - C(10, 0) \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{10} = 0.566$$

2) $n = 100$, $k_1 = 70$, $k_2 = 80$ болсын (жүп нұсқалар үшін). тәуелсіз тәжірибелер саны n үлкен болғандықтан, қандай да бір оқиғаның n тәжірибеде k рет пайда болу ықтималдығы $P_n(k)$ Муавр-Лаплас аймақтық теоремасымен есептелінеді және жуық шамамен $P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$ тең,

мұндағы $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2 / 2)$ (осы функцияның мәнін

кестеден немесе Mathcad жүйесіндегі dnorm функциясы арқылы табады).

B , C және D оқиғаларының ықтималдығын анықтау үшін Муавр-Лаплас интегралдық теоремасын қолданады: қандай да бір оқиғаның пайда болу k саны k_1 -ден k_2 -ге дейінгі аралығында болу ықтималдығы $P_n(k_1, k_2)$ жуық шамамен $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ тең, мұндағы $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2 / 2) dt$ - Лаплас функциясы, оның мәні арнайы кестеден

немесе Mathcad жүйесіндегі pnorm функциясы арқылы.

$$а) P(A) = P_{100}(80) \cong \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} \varphi(2.5) = 0.018 / 4 = 0.0045; \quad x = \frac{70 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -2.5;$$

$$б) P(B) = P_{100}(k \geq 80) = P_{100}(80, 100) \approx \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = 0.5; \quad x_3 = 5;$$

$$в) P(C) = P_{100}(k \leq 70) = P_{100}(0, 70) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_4) = 0.006; \quad x_4 = -20;$$

$$д) P(E) = P_{100}(70, 80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0.494, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -2.5.$$

Mathcad жүйесіндегі есептелінген есептеулер көрсетілген.

$$n := 100 \quad k1 := 70 \quad k2 := 80$$

$$p := 0.8 \quad q := 1 - p$$

$$x1 := \frac{k1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \quad x2 := \frac{k2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \quad x3 := \frac{n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \quad x4 := \frac{0 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

$$x1 = -2.5 \quad x2 = 0$$

$$\text{pnorm}(x2, 0, 1) - \text{pnorm}(x1, 0, 1) = 0.494, \quad \text{dnorm}(x1, 0, 1) = 0.018$$

$$\text{pnorm}(x3, 0, 1) - \text{pnorm}(x2, 0, 1) = 0.5$$

$$\text{pnorm}(x1, 0, 1) - \text{pnorm}(x4, 0, 1) = 6.21 \times 10^{-3}$$

немесе басқа нұсқа

$$\Phi(x) := \text{pnorm}(x, 0, 1) - 0.5$$

$$P(k1, k2) := \Phi(x2) - \Phi(x1)$$

$$\Phi(x1) = -0.494 \quad \Phi(x2) = 0$$

$$P(k1, k2) = 0.494 \quad x3 = 5 \quad x4 = -20$$

$$\Phi(x3) = 0.5 \quad \Phi(x4) = -0.5$$

$$\Phi(x3) - \Phi(x2) = 0.5 \quad \Phi(x1) - \Phi(x4) = 6.21 \times 10^{-3}$$

3) $P_n(k)$ ықтималдығын есептейтін тағы бір формула белгілі, ол n үлкен шама, p кіші шама, ал олардың көбейтіндісі $\lambda = n \cdot p$ үлкен емес сан болғанда қолданылады. Ол Пуассон формуласы $P_n(k) \approx \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$.

$n=1000$, $k=6$, $p=0,003$, $\lambda = 1000 \cdot 0,003 = 3$ болсын. Сондықтан $P_{1000}(6) = 3^6 \cdot e^{-3} / 6! = 0,05$.

Есептеулер кезінде $p(k, \lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$ функциясының кестелік мәнін немесе Mathcad-тан dpois функциясын қолдануға болады. Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$p(k, \lambda) := \text{dpois}(k, \lambda) \quad p(6, 3) = 0.05$$

$$p(k, \lambda) := \text{dpois}(k, \lambda)$$

5. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген.

| | | | | | | |
|-----|------|------|-----|------|-----|------|
| X | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| P | 0,05 | 0,15 | 0,3 | 0,25 | 0,2 | 0,05 |

Табу керек:

- үлестірім функциясын $F(x)$, оның графигін салу керек;
- математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;

в) X -тің (15;45) интервалына түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі:

а) X кездейсоқ шамасының $F(x)$ үлестірім функциясы (интегралдық үлестірім функциясы) $X < x$ оқиғасының ықтималдығын анықтайды. Дискретті кездейсоқ шамасы $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$ формуласымен есеп-

телінеді, мұндағы $x_i < x$ үшін қосу барлық i бойынша жүргізіледі.

Сонымен:

- егер $x \leq 0$, онда $F(x) = P(X < 0) = 0$;

- егер $0 < x \leq 10$, онда $F(x) = P(X = 0) = 0,05$;

- егер $10 < x \leq 20$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0,05 + 0,15 = 0,2$;

- егер $20 < x \leq 30$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) = 0,2 + 0,3 = 0,5$;

- егер $30 < x \leq 40$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) = 0,5 + 0,25 = 0,75$;

- егер $40 < x \leq 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) + P(X = 40) = 0,75 + 0,2 = 0,95$;

- егер $x > 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) + P(X = 40) + P(X = 50) = 0,95 + 0,05 = 1$.

$$\text{Сонымен, } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0 \\ 0,05, & \text{егер } 0 < x \leq 10 \\ 0,2, & \text{егер } 10 < x \leq 20 \\ 0,5, & \text{егер } 20 < x \leq 30 ; \\ 0,75, & \text{егер } 30 < x \leq 40 \\ 0,95, & \text{егер } 40 < x \leq 50 \\ 1, & \text{егер } x > 50 \end{cases}$$

График Mathcad жүйесінде сызылған (төменде);

б) сандық сипаттамаларын табайық. Дискретті кездейсоқ шама үшін математикалық үміт кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндерін оның ықтималдықтарына көбейтіп қосқанға тең: $M(X) = \sum_i x_i p_i$. Сондықтан

$$M(X) = 0 \cdot 0,15 + 10 \cdot 0,15 + 20 \cdot 0,3 + 30 \cdot 0,25 + 40 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,05 = 25,5.$$

X кездейсоқ шаманың дисперсиясы $D(X) = M[X - M(X)]^2$ формуласымен немесе $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ формуласымен есептелінеді. Дискретті кездейсоқ шама үшін бұл формулалар мына түрде қолданылады: $D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ немесе $D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$. Орта

квадраттық ауытқу $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ санына тең; дискретті кездейсоқ шаманың модасы (белгіленуі M_0) – осы кездейсоқ шаманың ең үлкен ықтималдықты қабылдайтын мәні; X –тің (a;b) интервалына түсу ықтималдығы $P(a;b) = F(b) - F(a)$ формуласымен есептелінеді. Біздің есеп үшін бұл шамалар:

$$D(x) = 154,75; \sigma(x) = \sqrt{154,75} = 12,44; M_0 = 20;$$

$$P(15;45) = F(45) - F(15) = 0,75.$$

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген, дисперсия екі формуламен де есептелінген.

ORIGIN= 1

$$M := s^T \cdot p^T$$

$$\underline{s} := (0 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50)$$

$$\underline{p} := (0.05 \ 0.15 \ 0.3 \ 0.25 \ 0.2 \ 0.05)$$

$$M = 25.5$$

$$s_0 := \underline{s}^T - M$$

$$D := \left[\overrightarrow{(s_0 \cdot s_0)} \right]^T \cdot \underline{p}^T$$

$$D = 154.75$$

$$s_2 := (0^2 \ 10^2 \ 20^2 \ 30^2 \ 40^2 \ 50^2)$$

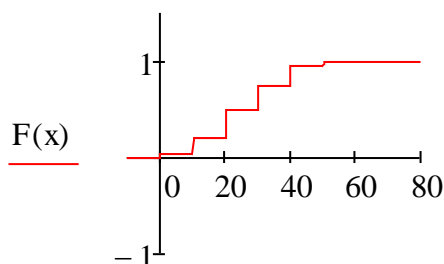
$$D_1 := s_2^T \cdot \underline{p}^T - M^2$$

$$D_1 = 154.75$$

$$\sigma := \sqrt{D} = 12.44$$

$$s_0 = \begin{pmatrix} -25.5 \\ -15.5 \\ -5.5 \\ 4.5 \\ 14.5 \\ 24.5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 0.05 & \text{if } 0 < x \leq 10 \\ 0.2 & \text{if } 10 < x \leq 20 \\ 0.5 & \text{if } 20 < x \leq 30 \\ 0.75 & \text{if } 30 < x \leq 40 \\ 0.95 & \text{if } 40 < x \leq 50 \\ 1 & \text{if } x > 50 \end{cases}$$



$$F(45) - F(15) = 0.75$$

x

6. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығымен $f(x)$ берілген.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0 \\ \frac{2}{9}(3x - x^2), & \text{егер } 0 < x \leq 3 \\ 0, & \text{егер } x > 3 \end{cases}$$

Табу керек:

а) үлестірім функциясын $F(x)$;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X –тің $(1; 4)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі:

а) үлестірім функциясын келесі формула бойынша табамыз

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

Сонымен:

- егер $x \leq 0$, то $f(x) = 0$, Сондықтан $F(x) = \int_{-\infty}^0 0dx = 0$;

- егер $0 < x \leq 3$, онда $F(x) = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x \frac{2}{9}(3x - x^2)dx = -\frac{x^2(2x - 9)}{27}$;

- егер $x > 3$, онда $F(x) = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^3 \frac{2}{9}(3x - x^2)dx + \int_3^x 0dx = 1$.

Сонымен, ізделінді үлестірім функциясы

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0 \\ -\frac{x^2(2x - 9)}{27}, & \text{егер } 0 < x \leq 3; \\ 1, & \text{егер } x > 3 \end{cases}$$

б) үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары мына формулалармен табылады: математикалық үміт $M(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx$; дисперсия

$$D(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} (x - M(x))^2 f(x)dx \text{ немесе } D(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 \text{ (интегралдау}$$

шектері кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері Ox осінің барлық немесе $(a;b)$ интервалының мәндерін қабылдауына байланысты); орта квадраттық ауытқуы $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$; X кездейсоқ шаманың модасы деп үлестірім тығыздығы максималды болатын M_o мәні айтылады; X кездейсоқ шаманың медианасы деп кездейсоқ шама M_e -ден кем немесе артық болғанда ықтималдығы бірдей болатын M_e мәні айтылады, яғни $P(X < M_e) = P(X > M_e) = 0,5$.

Сонымен, біздің есепте $M(x) = \int_0^3 2/9x(3x - x^2)dx = 1,5$;

$$D(x) = \int_0^3 x^2 \cdot 2/9(3x - x^2)dx - 1,5^2 = 0,45; \sigma(X) = \sqrt{0,45} = 0,671.$$

Моданы табу үшін функцияның $[0; 3]$ кесіндісіндегі максимумын табу керек $f(x) = 2/9(3x - x^2)$. Ол үшін туынды тауып, нөлге теңестіреміз: $f'(x) = 2/3 - 4x/9$, $x = 3/2$ нүктесінде $f'(x) = 0$, бұл кризистік нүкте. Функцияны экстремумға зерттейміз: $f'(1) > 0$, $f'(2) < 0$, Сонымен, $x = 3/2$ нүктесінен ауысқанда функцияның туындысы таңбасын плюстен минуске өзгертеді, олай болса $x = 3/2$ максимум нүктесі, сондықтан $M_o = 3/2$. Егер $f(x)$ сызықты функция болса, оның графигі түзу сызық болатыны белгілі. Онда функцияның максимумы $f(x)$ графигі бойынша кесінді шекарасында және M_o нүктесінде ізделінеді.

Медиананы келесі шарттан табамыз $P(X < M_e) = 0,5$, мұндағы $P(X < M_e) = P(-\infty < X < M_e) = P(0 < X < M_e)$.

$$P(0 < X < M_e) = \int_0^{M_e} 2/9(3x - x^2) dx = M_e^2(2M_e - 9)/27 \quad \text{болғандықтан,}$$

$M_e^2(2M_e - 9)/27 = 0,5$ теңдеуін шешіп, үш түбір аламыз, олардың біреуі берілген кесіндіге тиісті: $M_e = 1,5$.

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$f(x) := \frac{2}{9} \cdot (3 \cdot x - x^2) \quad \sqrt{\frac{9}{20}} = 0.671$$

$$\int_0^3 x \cdot f(x) dx \rightarrow \frac{3}{2} = 1.5 \quad \int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{9}{20} = 0.45$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{2}{3} - \frac{4 \cdot x}{9}$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\int_0^y f(x) dx \rightarrow -\frac{y^2 \cdot (2 \cdot y - 9)}{27} \quad f1(x) \text{ solve} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$f1(1) = 0.222$$

$$f1(2) = -0.222$$

$$-\frac{y^2 \cdot (2 \cdot y - 9)}{27} - 0.5 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 4.0980762113533159403 \\ -1.0980762113533159403 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.098 \\ -1.098 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

в) X-тің (1;4) интервалына түсу ықтималдығы

$$P(1 < X < 4) = P(1 < X < 3) + P(3 < X < 4) = \int_1^3 2/9(3x - x^2) dx + \int_3^4 0 dx = 0,741$$

$$\text{немесе } P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) = 1 - \left(-\frac{1 \cdot (2-9)}{27}\right) = \frac{20}{27} = 0,74.$$

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$\int_1^3 f(x) dx \rightarrow \frac{20}{27} = 0.741 \quad f2(x) := -\frac{x^2 \cdot (2 \cdot x - 9)}{27}$$

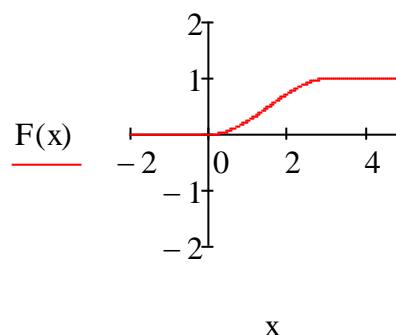
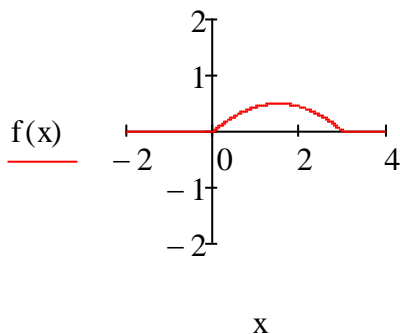
$$f2(1) = 0.259$$

$$1 - 0.259 = 0.741$$

$F(x)$ және $f(x)$ функцияларының графиктерін Mathcad жүйесінде саламыз:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \left[\frac{2}{9} \cdot (3 \cdot x - x^2) \right] & \text{if } 0 < x \leq 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \frac{x^2 \cdot (9 - 2 \cdot x)}{27} & \text{if } 0 < x \leq 3 \\ 1 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$



7. Алты өнімді сенімділікке тексеру сынығы жүргізілуде. Әрбір өнімнің сынақты өтпеуінің ықтималдығы 25%-ды құрайды. Сынақты өтпеген өнім санының үлестірім заңын құру керек (X кездейсоқ шамасы). Осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын табу керек.

Шешуі: дискретті кездейсоқ шама X – сынақты өтпеген өнім саны. Оның мүмкін мәндері: $x_1 = 0$ (өнімдер сынақты өтті), $x_2 = 1$ (бір өнім сынақты өтпеді) және с.с. $x_7 = 6$ (алты өнім сынақты өтпеді). Мүмкін мәндер тәуелсіз және олардың әрқайсысының пайда болуы бірдей $p=0,25$, сондықтан X кездейсоқ шамасы бином заңы бойынша үлестірілген: $P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, мұндағы $k = 0, 1, 2, \dots, 6$, $q = 1 - p$, $n = 6$.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P_6(0) = C_6^0 0,25^0 0,75^6 = 0,178; \\ P(X = 1) &= P_6(1) = C_6^1 0,25^1 0,75^5 = 0,356; \quad P(X = 2) = P_6(2) = C_6^2 0,25^2 0,75^4 = 0,297; \\ P(X = 3) &= P_6(3) = C_6^3 0,25^3 0,75^3 = 0,132; \quad P(X = 4) = P_6(4) = C_6^4 0,25^4 0,75^2 = 0,033; \\ P(X = 5) &= P_6(5) = C_6^5 0,25^5 0,75^1 = 0,004; \quad P(X = 6) = P_6(6) = C_6^6 0,25^6 0,75^0 = 0,0002. \end{aligned}$$

Ізделінді үлестірім заңы:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| p | 0,178 | 0,356 | 0,297 | 0,132 | 0,033 | 0,004 | 0,0002 |

Бином үлестірімінің сандық сипаттамаларын дискретті кездейсоқ шаманың белгілі формулалары бойынша алуға болады:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i, \quad D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \quad \text{или} \quad D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2.$$

Алайда, математикалық үміт пен дисперсияның қасиеттерін қолданған қолайлы, егер X – оқиғасының n сынақта пайда болуы: $M(X) = np$, $D(X) = npq$. Біздің жағдайда $M(X) = 6 \cdot 0,25 = 1,5$, $D(X) = 6 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 1,125$.
 $\sigma(x) = \sqrt{D(X)} \approx 1,06$.

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$\begin{aligned} C(Q,R) &:= \text{combin}(Q,R) & C(6,2) \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^4 &= 0.297 \\ C(6,0) \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^6 &= 0.178 & C(6,3) \cdot 0.25^3 \cdot 0.75^3 &= 0.132 \\ C(6,1) \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^5 &= 0.356 & C(6,5) \cdot 0.25^5 \cdot 0.75^1 &= 4.395 \times 10^{-3} \\ C(6,4) \cdot 0.25^4 \cdot 0.75^2 &= 0.033 & & \\ C(6,6) \cdot 0.25^6 \cdot 0.75^0 &= 2.441 \times 10^{-4} & & \end{aligned}$$

Бином үлестірімінің талдауын Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөзі binom (dbinom, rbinom, qbinom, rbinom). Мысалы, dbinom(k,n,p) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

8. Аппарат 1000 элементтен тұрады. Бір элементтің бір жыл бойына істен шығу ықтималдығы 0,001-ға тең және қалған элементтердің жағдайынан тәуелсіз.

Табу керек:

- а) істен шыққан элементтер санының үлестірім заңын құрастыру керек;
- б) жылына екіден кем емес элементтің істен шығу ықтималдығы қандай?

Шешуі:

а) дискретті кездейсоқ шама X – істен шыққан элементтер саны Пуассон заңымен үлестірілген (әрбір сынақта оқиғаның пайда болу ықтималдығы p аз, ал n сынақ саны үлкен): $P(X = k) = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, мұндағы $\lambda = np = 1000 \cdot 0,001 = 1$, $k = 0,1,2, \dots, 1000$, $n = 1000$.

$$\begin{aligned} \text{Сонымен, } P(X = 0) &= P_{1000}(0) \approx \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 0,368; \quad P(X = 1) = P_{1000}(1) \approx \frac{1^1}{1!} e^{-1} = \\ 0,368; \quad P(X = 2) &= P_{1000}(2) \approx \frac{1^2}{2!} e^{-1} = 0,184; \end{aligned}$$

$$P(X = 3) = P_{1000}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} 0,061, \text{ және т.с.с.}$$

$$P(X = 10) = P_{1000}(10) \approx \frac{1^{10}}{10!} e^{-1} = 0,0000001 \text{ және т.с.с. Изделінді үлестірім заңы:}$$

| | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-----|-----------|-----|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | 10 | ... |
| p | 0,368 | 0,368 | 0,184 | 0,061 | ... | 0,0000001 | ... |

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$p(k, \lambda) := \text{dpois}(k, \lambda)$$

$$p(0, 1) = 0.368$$

$$p(4, 1) = 0.015$$

$$p(1, 1) = 0.368$$

$$p(5, 1) = 3.066 \times 10^{-3}$$

$$p(2, 1) = 0.184$$

$$p(10, 1) = 1.014 \times 10^{-7}$$

$$p(3, 1) = 0.061$$

$$p(1000, 1) = 0$$

б) екіден кем емес элементтің істен шығу ықтималдығы келесі формуламен есептелінеді:

$$P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{1000} P_{1000}(k) \text{ немесе}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,368 - 0,368 = 0,264.$$

Пуассон үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөзі pois (dpois, rpois, qpois, gpois). Мысалы, dpois(k,n,p) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

9. а. 1-15 нұсқалары.

Өлшегіш құрал бағасы 0,2-ге тең бөлікке бөлінген. Құралдың көрсеткіші жақын бүтін бөлікке дейін жуықталады. X кездейсоқ шамасы – жуықтау қателігі.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) есептегенде m -нен кем (артық) қате кету ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

9. б. 16 – 30 нұсқалары.

Метро пойыздары тек кесте бойынша ғана жүреді. Жүру интервалы a минут. X кездейсоқ шамасы – пойызды күту уақыты.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) аялдамаға келген жолаушы пойызды 0,04 минуттен кем (артық) күту ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X кездейсоқ шамасы – жуықтап есептеуде жіберілген қате екі бүтін бөліктеу арасында бірқалыпты жүргізілген; $b - a = 0,2$ – X –тің мүмкін мәндер енетін интервалдың ұзындығы. Бірқалыпты үлестірімнің тығыздығы

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{егер } x \in (a,b) \\ 0, & \text{егер } x \notin (a,b) \end{cases} \text{ формуласымен есептелінеді.}$$

$$\text{Үлестірім функциясы} - F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{егер } a < x \leq b; \\ 1, & \text{егер } x > b \end{cases}$$

$$\text{Математикалық үміті және дисперсиясы} - M(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$(\alpha, \beta) \text{ аралығына түсу ықтималдығы} - P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Біздің есеп үшін:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0,2} = 5, & \text{егер } x \in (0; 0,2) \\ 0, & \text{егер } x \notin (0; 0,2) \end{cases};$$

$$\text{б) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0 \\ \frac{x}{0,2} = 5x, & \text{егер } 0 < x \leq 0,2; \\ 1, & \text{егер } x > 0,2 \end{cases}$$

$$\text{в) } M(X) = \frac{0,2+0}{2} = 0,1; D(X) = \frac{(0,2-0)^2}{12} = 0,003;$$

г) егер ол $(0; 0,04)$ немесе $(0,16; 0,2)$ аралығына түссе (A оқиғасы), онда есептегенде 0,04-тен кем қате кететіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы

$$P(A) = P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,2) = \frac{0,04 - 0}{0,2} + \frac{0,2 - 0,16}{0,2} = 0,4;$$

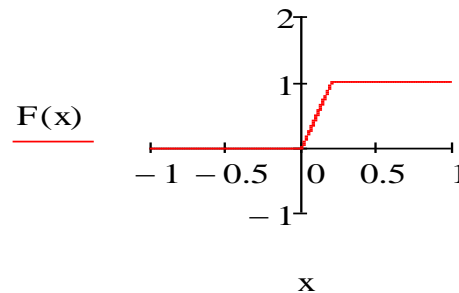
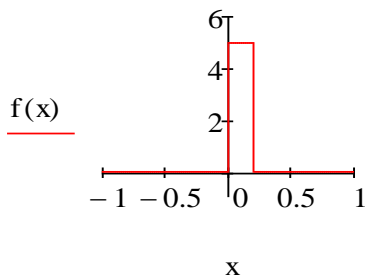
егер ол $(0,04; 0,16)$ аралығына түссе (B оқиғасы), онда есептегенде 0,04-тен артық қате кететіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы

$$P(B) = P(0,04 < X < 0,16) = \frac{0,16 - 0,04}{0,2} = 0,6 \text{ немесе } P(B) = 1 - P(A).$$

Mathcad жүйесінде $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін саламыз.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ (5 \cdot x) & \text{if } 0 < x \leq 0.2 \\ 1 & \text{if } x > 0.2 \end{cases}$$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 5 & \text{if } 0 < x \leq 0.2 \\ 0 & \text{if } x > 0.2 \end{cases}$$



Бірқалыпты үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері `unif: dunif(x,a,b)`– үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері `pnif(x,a,b)` – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; `gunif(n,a,b)` – (a,b) аралығында бірқалыпты үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

10. Элементтің мүлтіксіз жұмыс уақыты (T кездейсоқ шамасы) $\lambda = 0,5$ параметрімен көрсеткішті үлестірілген, мұндағы λ - істен шығу интенсивтілігі, яғни бірлік уақыт ішіндегі істен шығудың орта саны.

Табу керек:

- үлестірім тығыздығын $f(t)$;
- үлестірім функциясын $F(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;
- сенімділік функциясын $R(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;
- математикалық үмітін, дисперсиясын;
- элементтің $t=5$ сағат уақыт ішінде істен шығу ықтималдығын және элементтің t уақыт ішінде істен шықпау ықтималдығын $F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X үзіліссіз кездейсоқ шамасы $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}$

тығыздығымен берілсе, онда ол көрсеткіштік үлестірім заңына бағынады. Көрсеткіштік үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары:

$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}$ - үлестірім функциясы; егер кездейсоқ шама $X=T$ -

уақыты болса, онда $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ элементтің t уақытындағы істен шығуының ықтималдығы; $R(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$ – сенімділік функциясы, t уақытындағы элементтің мүлтіксіз жұмысының ықтималдығы;

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}; P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Біздің есепте $t \geq 0$ болатындығын ескерсек:

а) $f(t) = 0,5e^{-0,5t}$;

б) $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-0,5t}$, элементтің t уақытындағы істен шығуының ықтималдығын анықтайды;

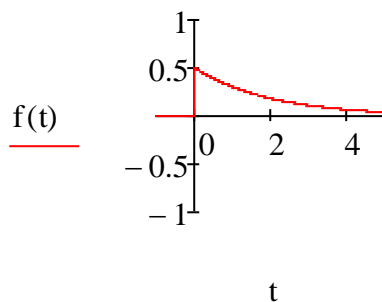
в) $R(t) = e^{-0,5t}$, t уақытындағы элементтің мүлтіксіз жұмысының ықтималдығын анықтайды;

г) $M(X) = \frac{1}{0,5} = 2$; $D(X) = \frac{1}{0,5^2} = 4$;

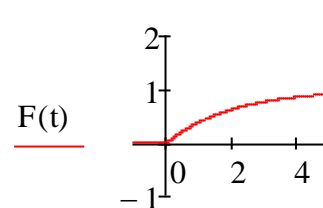
д) үлестірім функциясы t уақытындағы істен шығуының ықтималдығын анықтайтын болғандықтан, оған $t=5$ мәнін қойып, $t=5$ сағат уақыты ішіндегі істен шығуының ықтималдығын аламыз: $F(5) = 1 - e^{-0,5 \cdot 5} = 1 - e^{-2,5} = 0,918$; «элемент істен шығады» және «элемент істен шықпайды» оқиғалары – қарама-қарсы, сондықтан $t=5$ уақытындағы элементтің мүлтіксіз жұмысының ықтималдығы $1 - 0,918 = 0,082$. Бұл нәтижені сенімділік функциясын қолданып алуға болады: $R(5) = e^{-0,5 \cdot 5} = e^{-2,5} = 0,082$.

Mathcad жүйесінде $F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салып, кейбір есептеулер жүргіземіз:

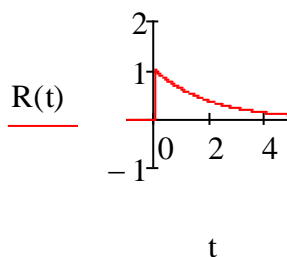
$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 0,5 \cdot e^{-0,5 \cdot t} & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



$$F(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 - e^{-0,5 \cdot t} & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



$$R(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ e^{-0,5 \cdot t} & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



$$e^{-2,5} = 0,082$$

$$1 - e^{-2,5} = 0,918$$

Көрсеткіштік үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері exr : $\text{dexr}(x, \lambda)$ – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері $\text{rexr}(x, \lambda)$ – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; $\text{gexr}(n, \lambda)$ – λ параметрлі көрсеткішті үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

11. Өнімнің өлшемінің номиналдан кездейсоқ ауытқуы (X кездейсоқ шамасы) $a=10$ және $\sigma=2$ параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады.

Табу керек:

а) үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) (12;14) аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша $\delta=3$ -тен аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X үзіліссіз кездейсоқ шамасы $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

тығыздығымен берілсе, онда ол қалыпты үлестірім заңына бағынады, мұндағы $a = M(x)$ – математикалық үміт, $\sigma = \sigma(X)$ – орта квадраттық ауытқу. Қалыпты үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right] dt$ немесе $F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + 0,5$,

мұндағы $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – Лаплас функциясы, оның мәнін кестеден

немесе Mathcad жүйесінде табуға болады;

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен δ -дан артық емес ауытқуының ықтималдығы $P(|X - a| \leq \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формуласымен есептелінеді.

Біздің есеп үшін:

а) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$;

б) $F(x) = \Phi\left(\frac{x-10}{2}\right) + 0,5$;

в) $M(X) = a = 10$, $\sigma(X) = \sigma = 2$, $D(X) = \sigma^2 = 4$;

$$\text{г) } P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359;$$

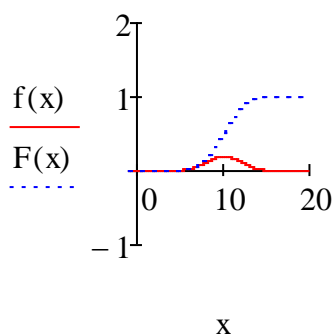
д) өлшеу абсолют шамасы бойынша $\delta=3$ -тен аспайтындай қате жіберу ықтималдығын $P(|X - 10| \leq 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 2\Phi(1,5) = 0,4332$.

Лаплас функциясының мәні бұл жерде кестеден алынған, оны Mathcad жүйесінде де табуға болады.

Қалыпты үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері norm және d , p , q , r . әріптерінен басталатын сөздер. Мысалы, $\text{dnorm}(x, a, \sigma)$ – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері $\text{pnorm}(x, a, \sigma)$ – үлестірім функциясының мәндерін шығарады. Осы функцияларды сәйкес графиктерді салу үшін қолданамыз. Төменде Mathcad-та есептеулермен файлдың көшірмелері келтірілген.

$$f(x) := \text{dnorm}(x, 10, 2)$$

$$F(x) := \text{pnorm}(x, 10, 2)$$



2 Есептік-сызба жұмыс №2. Математикалық статистика элементтері.

Мақсаты: математикалық статистиканың негізгі есептерін: кездейсоқ жаппай құбылыстардың нәтижелерін өңдеп, талдау есептерін оқып-үйрену.

2.1 Теориялық сұрақтар

1. Математикалық статистика пәні және оның негізгі есептері. Негізгі ұғымдар (таңдама, таңдама көлемі, варианттар, статистикалық қатар, интервалдық қатар).

2. Эмпирикалық үлестірім функциясы, полигон, гистограмма.

3. Үлестірімнің белгісіз параметрлерін анықтау (таңдама ортасы, таңдама дисперсиясы және түзетілген таңдама дисперсиясы).

4. Үлестірім параметрінің нүктелік және интервалдық бағалары.

5. Бағаның дәлдігі және сенімділігі. Сенімділік интервалы.

6. σ белгілі болғанда қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалы.

7. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың орта квадраттық ауытқуын бағалау үшін сенімділік интервалы.

8. Корреляциялық тәуелділік ұғымы. Регрессия функциясы мен сызығы.

2.2 Есептік тапсырмалар

1. Берілген таңдама үшін өдеу және жүйелеу есептерін анықтап және орындау керек:

а) вариациялық қатарды (таңдаманы өсу ретімен);

б) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды;

в) жиілік және қатысты жиілік интервалдық статистикалық қатарын (минималды және максималды варианттарды, таңдаманың құлашын, интервалдар санын, интервалдар ұзындығын);

г) дискретті (топталған) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды салу керек;

2. Берілген таңдама талдау және бағалау есептерін орындау керек, анықтау керек:

а) интервалдық статистикалық қатар бойынша жиілік және қатысты жиілік гистограммасын құру керек;

б) дискретті статистикалық қатар бойынша табу керек:

- жиілік және қатысты жиілік полигонын;

- үлестірімнің эмпирикалық функциясын;

- таңдама ортасын;

- таңдама және түзетілген таңдама дисперсиясын;

- түзетілген таңдама орта квадраттық ауытқуын;

- таңдама модасы мен медианасын;

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 112 | 101 | 155 | 137 | 109 | 129 | 152 | 128 | 132 | 116 |
| | 125 | 125 | 142 | 140 | 125 | 118 | 125 | 135 | 149 | 145 |
| | 106 | 109 | 138 | 145 | 118 | 128 | 125 | 105 | 122 | 138 |
| | 120 | 118 | 133 | 118 | 129 | 149 | 124 | 153 | 132 | 118 |
| | 132 | 132 | 138 | 128 | 122 | 115 | 143 | 140 | 122 | 152 |
| | 128 | 118 | 126 | 132 | 134 | 123 | 122 | 159 | 112 | 110 |
| | 112 | 121 | 105 | 117 | 112 | 129 | 129 | 118 | 112 | 116 |
| | 2 | 87 | 85 | 91 | 94 | 102 | 80 | 75 | 102 | 99 |
| 120 | | 122 | 101 | 88 | 80 | 97 | 92 | 91 | 94 | 82 |
| 115 | | 100 | 97 | 91 | 87 | 116 | 121 | 101 | 123 | 97 |
| 88 | | 90 | 101 | 95 | 93 | 92 | 88 | 94 | 98 | 99 |
| 95 | | 105 | 112 | 116 | 118 | 108 | 95 | 99 | 92 | 100 |
| 94 | | 106 | 112 | 122 | 100 | 92 | 93 | 82 | 111 | 102 |
| 100 | | 101 | 123 | 97 | 90 | 104 | 108 | 101 | 96 | 111 |

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3 | 547 | 565 | 587 | 553 | 548 | 554 | 561 | 562 | 551 | 572 |
| | 565 | 555 | 563 | 568 | 586 | 549 | 575 | 537 | 581 | 553 |
| | 543 | 568 | 574 | 564 | 547 | 549 | 553 | 572 | 535 | 555 |
| | 552 | 545 | 554 | 571 | 569 | 539 | 549 | 553 | 562 | 561 |
| | 558 | 563 | 563 | 547 | 552 | 562 | 554 | 563 | 558 | 572 |
| | 577 | 554 | 552 | 566 | 557 | 551 | 552 | 571 | 551 | 552 |
| | 599 | 561 | 552 | 551 | 561 | 538 | 533 | 541 | 588 | 558 |
| | 4 | 90 | 123 | 132 | 85 | 122 | 105 | 125 | 142 | 99 |
| 118 | | 105 | 115 | 92 | 115 | 142 | 98 | 123 | 103 | 144 |
| 106 | | 92 | 118 | 105 | 118 | 86 | 125 | 105 | 122 | 138 |
| 102 | | 130 | 112 | 98 | 115 | 120 | 118 | 103 | 118 | 129 |
| 112 | | 115 | 88 | 118 | 103 | 102 | 95 | 124 | 106 | 135 |
| 95 | | 124 | 103 | 102 | 118 | 112 | 115 | 92 | 115 | 119 |
| 103 | | 122 | 94 | 112 | 97 | 128 | 102 | 116 | 125 | 132 |
| 5 | | 139 | 112 | 132 | 85 | 122 | 105 | 125 | 142 | 99 |
| | 116 | 105 | 92 | 115 | 98 | 123 | 103 | 144 | 115 | 142 |
| | 106 | 92 | 118 | 86 | 125 | 105 | 122 | 138 | 105 | 118 |
| | 102 | 130 | 112 | 98 | 115 | 120 | 118 | 103 | 118 | 129 |
| | 112 | 115 | 88 | 118 | 103 | 102 | 95 | 124 | 106 | 135 |
| | 95 | 124 | 103 | 102 | 118 | 112 | 115 | 103 | 95 | 122 |
| | 125 | 118 | 96 | 126 | 98 | 106 | 128 | 118 | 126 | 103 |
| | 134 | 112 | 101 | 105 | 117 | 92 | 129 | 99 | 118 | 112 |
| 6 | 154 | 143 | 155 | 113 | 155 | 171 | 168 | 153 | 135 | 168 |
| | 145 | 168 | 122 | 163 | 117 | 165 | 132 | 139 | 107 | 125 |
| | 146 | 152 | 142 | 132 | 152 | 161 | 148 | 136 | 138 | 149 |
| | 157 | 178 | 149 | 195 | 146 | 166 | 182 | 135 | 136 | 170 |
| | 155 | 152 | 145 | 198 | 192 | 143 | 159 | 116 | 126 | 155 |
| | 163 | 169 | 165 | 148 | 151 | 153 | 139 | 166 | 138 | 128 |
| | 168 | 157 | 143 | 179 | 165 | 159 | 149 | 141 | 102 | 169 |
| | 7 | 470 | 801 | 790 | 764 | 764 | 950 | 533 | 402 | 520 |
| 699 | | 840 | 869 | 551 | 707 | 635 | 703 | 801 | 859 | 475 |
| 797 | | 797 | 789 | 875 | 698 | 580 | 821 | 737 | 910 | 856 |
| 950 | | 741 | 473 | 988 | 737 | 787 | 667 | 649 | 797 | 939 |
| 532 | | 885 | 590 | 590 | 975 | 910 | 731 | 869 | 435 | 889 |
| 584 | | 967 | 950 | 531 | 775 | 485 | 756 | 656 | 680 | 741 |
| 950 | | 458 | 511 | 857 | 536 | 699 | 474 | 789 | 889 | 533 |
| 8 | | 450 | 434 | 424 | 432 | 440 | 443 | 415 | 446 | 423 |
| | 442 | 452 | 444 | 425 | 403 | 458 | 455 | 431 | 446 | 424 |
| | 438 | 442 | 482 | 432 | 416 | 477 | 431 | 432 | 412 | 462 |
| | 496 | 468 | 424 | 438 | 452 | 446 | 418 | 474 | 432 | 452 |
| | 466 | 488 | 452 | 489 | 451 | 422 | 442 | 492 | 473 | 402 |
| | 481 | 468 | 404 | 498 | 467 | 398 | 440 | 449 | 417 | 425 |
| | 444 | 498 | 466 | 442 | 483 | 462 | 492 | 435 | 449 | 422 |

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 9 | 250 | 244 | 224 | 232 | 240 | 224 | 244 | 226 | 253 | 232 |
| | 248 | 216 | 230 | 254 | 258 | 202 | 225 | 224 | 252 | 234 |
| | 242 | 212 | 231 | 251 | 204 | 246 | 232 | 282 | 242 | 252 |
| | 296 | 242 | 254 | 218 | 226 | 252 | 238 | 224 | 298 | 260 |
| | 276 | 254 | 282 | 242 | 270 | 254 | 260 | 232 | 268 | 242 |
| | 244 | 276 | 224 | 240 | 272 | 268 | 281 | 234 | 268 | 251 |
| | 271 | 212 | 234 | 262 | 204 | 261 | 254 | 266 | 278 | 248 |
| | 10 | 165 | 143 | 152 | 167 | 164 | 199 | 171 | 171 | 156 |
| 147 | | 155 | 158 | 145 | 158 | 177 | 161 | 181 | 153 | 171 |
| 175 | | 153 | 174 | 154 | 163 | 174 | 152 | 188 | 162 | 197 |
| 187 | | 158 | 154 | 171 | 163 | 172 | 152 | 178 | 151 | 172 |
| 153 | | 186 | 147 | 169 | 147 | 166 | 161 | 171 | 161 | 186 |
| 148 | | 161 | 189 | 199 | 162 | 167 | 198 | 168 | 135 | 152 |
| 154 | | 175 | 163 | 149 | 162 | 161 | 161 | 193 | 172 | 175 |
| 161 | | 164 | 178 | 138 | 164 | 172 | 187 | 178 | 143 | 161 |
| 11 | 153 | 174 | 154 | 163 | 174 | 152 | 188 | 162 | 197 | 234 |
| | 188 | 158 | 154 | 171 | 163 | 172 | 152 | 178 | 151 | 172 |
| | 155 | 186 | 147 | 169 | 147 | 166 | 161 | 171 | 161 | 186 |
| | 149 | 161 | 189 | 199 | 162 | 167 | 198 | 168 | 135 | 152 |
| | 156 | 175 | 163 | 149 | 162 | 161 | 161 | 193 | 172 | 175 |
| | 162 | 164 | 178 | 138 | 164 | 172 | 187 | 178 | 143 | 161 |
| | 165 | 163 | 177 | 161 | 149 | 146 | 152 | 139 | 156 | 152 |
| | 12 | 212 | 231 | 251 | 204 | 246 | 232 | 282 | 242 | 252 |
| 297 | | 242 | 254 | 218 | 226 | 252 | 238 | 224 | 298 | 260 |
| 277 | | 254 | 282 | 242 | 270 | 254 | 260 | 232 | 268 | 242 |
| 345 | | 276 | 224 | 240 | 272 | 268 | 281 | 234 | 268 | 232 |
| 272 | | 212 | 234 | 292 | 204 | 261 | 254 | 266 | 278 | 248 |
| 253 | | 262 | 256 | 264 | 272 | 242 | 244 | 246 | 253 | 234 |
| 237 | | 264 | 252 | 248 | 247 | 268 | 229 | 235 | 262 | 212 |
| 238 | | 242 | 254 | 263 | 261 | 266 | 254 | 264 | 248 | 251 |
| 13 | 165 | 143 | 52 | 166 | 164 | 199 | 171 | 171 | 156 | 171 |
| | 148 | 155 | 158 | 145 | 158 | 177 | 161 | 181 | 153 | 197 |
| | 176 | 153 | 174 | 154 | 163 | 174 | 152 | 188 | 162 | 172 |
| | 189 | 158 | 154 | 171 | 163 | 172 | 152 | 178 | 151 | 186 |
| | 157 | 186 | 147 | 169 | 147 | 166 | 161 | 171 | 161 | 152 |
| | 150 | 161 | 189 | 199 | 162 | 167 | 198 | 168 | 135 | 175 |
| | 158 | 175 | 163 | 149 | 162 | 161 | 161 | 193 | 172 | |

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 14 | 216 | 230 | 254 | 258 | 202 | 225 | 224 | 252 | 234 | 250 |
| | 243 | 212 | 231 | 251 | 204 | 246 | 232 | 282 | 242 | 252 |
| | 298 | 242 | 254 | 218 | 226 | 252 | 238 | 224 | 298 | 260 |
| | 278 | 254 | 282 | 242 | 270 | 254 | 260 | 232 | 268 | 242 |
| | 246 | 276 | 224 | 240 | 272 | 268 | 281 | 234 | 268 | 232 |
| | 273 | 212 | 234 | 262 | 201 | 261 | 254 | 266 | 278 | 248 |
| | 254 | 262 | 256 | 264 | 272 | 242 | 244 | 246 | 253 | 234 |
| | 239 | 264 | 252 | 248 | 247 | 268 | 229 | 235 | 262 | 212 |
| | 15 | 165 | 143 | 152 | 167 | 165 | 199 | 171 | 171 | 156 |
| 149 | | 155 | 158 | 145 | 158 | 177 | 161 | 181 | 153 | 171 |
| 153 | | 174 | 154 | 163 | 174 | 152 | 188 | 162 | 197 | 178 |
| 190 | | 158 | 154 | 171 | 163 | 172 | 152 | 178 | 151 | 172 |
| 159 | | 186 | 147 | 169 | 147 | 166 | 161 | 171 | 161 | 186 |
| 151 | | 161 | 189 | 199 | 162 | 167 | 198 | 168 | 135 | 152 |
| 160 | | 175 | 163 | 149 | 162 | 161 | 161 | 193 | 172 | 175 |
| 165 | | 164 | 178 | 137 | 164 | 172 | 187 | 178 | 143 | 161 |
| 16 | | 147 | 153 | 179 | 165 | 159 | 149 | 141 | 102 | 169 |
| | 169 | 154 | 143 | 155 | 113 | 155 | 171 | 168 | 153 | 135 |
| | 150 | 152 | 142 | 132 | 152 | 161 | 148 | 136 | 138 | 149 |
| | 157 | 178 | 149 | 195 | 146 | 166 | 182 | 135 | 136 | 170 |
| | 156 | 152 | 145 | 198 | 192 | 143 | 159 | 116 | 126 | 155 |
| | 164 | 169 | 165 | 148 | 151 | 153 | 139 | 166 | 138 | 128 |
| | 169 | 169 | 155 | 152 | 175 | 177 | 131 | 154 | 174 | 187 |
| | 180 | 177 | 162 | 149 | 146 | 113 | 151 | 152 | 134 | 125 |
| | 17 | 558 | 563 | 569 | 547 | 552 | 562 | 554 | 549 | 575 |
| 561 | | 552 | 551 | 561 | 538 | 533 | 547 | 552 | 557 | 543 |
| 547 | | 565 | 587 | 553 | 548 | 554 | 561 | 564 | 562 | 558 |
| 566 | | 555 | 563 | 568 | 586 | 549 | 575 | 564 | 553 | 555 |
| 567 | | 556 | 546 | 552 | 543 | 554 | 556 | 566 | 592 | 562 |
| 544 | | 568 | 574 | 564 | 547 | 549 | 553 | 578 | 557 | 561 |
| 553 | | 545 | 554 | 571 | 569 | 539 | 549 | 538 | 575 | 554 |
| 577 | | 552 | 566 | 557 | 551 | 552 | 546 | 584 | 572 | 535 |
| 18 | | 577 | 568 | 557 | 564 | 547 | 549 | 553 | 578 | 557 |
| | 554 | 5455 | 554 | 571 | 569 | 539 | 549 | 538 | 575 | 566 |
| | 558 | 563 | 563 | 547 | 552 | 562 | 554 | 549 | 575 | 558 |
| | 547 | 595 | 587 | 553 | 548 | 554 | 561 | 564 | 562 | 544 |
| | 555 | 563 | 568 | 586 | 549 | 575 | 564 | 553 | 585 | 592 |
| | 577 | 554 | 552 | 566 | 557 | 551 | 552 | 546 | 584 | 556 |
| | 601 | 561 | 552 | 551 | 561 | 538 | 533 | 547 | 552 | 557 |
| | 555 | 541 | 588 | 558 | 563 | 558 | 572 | 578 | 539 | 556 |

| | | | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 19 | 77 | 45 | 49 | 92 | 13 | 69 | 52 | 26 | 22 | 36 |
| | 48 | 25 | 59 | 57 | 65 | 69 | 55 | 68 | 49 | 63 |
| | 38 | 53 | 48 | 68 | 52 | 73 | 42 | 62 | 71 | 45 |
| | 63 | 55 | 16 | 78 | 52 | 95 | 77 | 66 | 35 | 54 |
| | 68 | 55 | 49 | 65 | 79 | 48 | 59 | 53 | 41 | 38 |
| | 12 | 39 | 57 | 51 | 65 | 66 | 43 | 52 | 63 | 43 |
| | 55 | 69 | 31 | 62 | 48 | 46 | 51 | 43 | 16 | 34 |
| | 74 | 51 | 82 | 52 | 46 | 75 | 49 | 55 | 57 | 54 |
| 20 | 347 | 365 | 387 | 348 | 354 | 361 | 364 | 362 | 346 | 358 |
| | 365 | 355 | 363 | 368 | 359 | 375 | 364 | 353 | 385 | 363 |
| | 343 | 368 | 374 | 364 | 347 | 349 | 353 | 378 | 357 | 358 |
| | 352 | 345 | 354 | 352 | 371 | 369 | 349 | 338 | 375 | 388 |
| | 366 | 358 | 363 | 347 | 352 | 362 | 354 | 349 | 375 | 341 |
| | 377 | 354 | 352 | 366 | 357 | 351 | 352 | 346 | 384 | 351 |
| | 399 | 363 | 361 | 352 | 351 | 361 | 338 | 353 | 333 | 357 |
| 21 | 9 | 9 | 6 | 9 | 9 | 7 | 6 | 11 | 6 | 7 |
| | 6 | 10 | 6 | 7 | 6 | 8 | 6 | 5 | 5 | 4 |
| | 6 | 6 | 7 | 12 | 5 | 7 | 8 | 5 | 10 | 9 |
| | 7 | 7 | 5 | 11 | 9 | 7 | 6 | 5 | 7 | 6 |
| | 5 | 5 | 12 | 9 | 8 | 7 | 9 | 8 | 5 | 5 |
| | 6 | 13 | 11 | 11 | 5 | 8 | 10 | 9 | 4 | 7 |
| | 3 | 6 | 9 | 8 | 12 | 11 | 9 | 10 | 4 | 14 |
| 22 | 39 | 40 | 38 | 43 | 41 | 42 | 40 | 38 | 41 | 42 |
| | 41 | 40 | 42 | 39 | 41 | 41 | 36 | 43 | 41 | 42 |
| | 34 | 36 | 37 | 42 | 42 | 42 | 40 | 41 | 41 | 46 |
| | 47 | 48 | 52 | 56 | 68 | 70 | 68 | 64 | 56 | 58 |
| | 41 | 42 | 39 | 33 | 34 | 37 | 43 | 45 | 47 | 71 |
| | 43 | 42 | 43 | 41 | 42 | 47 | 48 | 49 | 52 | 53 |
| | 57 | 52 | 41 | 42 | 46 | 48 | 49 | 39 | 32 | 40 |
| | 39 | 37 | 42 | 43 | 54 | 58 | 59 | 64 | 66 | 68 |
| 23 | 10 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 15 | 16 | 11 |
| | 17 | 12 | 13 | 14 | 15 | 11 | 18 | 16 | 15 | 18 |
| | 20 | 20 | 21 | 23 | 26 | 28 | 23 | 28 | 27 | 24 |
| | 27 | 24 | 25 | 25 | 26 | 32 | 33 | 31 | 34 | 43 |
| | 26 | 32 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 21 | 22 | 23 |
| | 42 | 24 | 23 | 35 | 23 | 25 | 36 | 37 | 24 | 21 |
| | 58 | 54 | 49 | 47 | 32 | 36 | 43 | 23 | 24 | 28 |

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 24 | 150 | 144 | 124 | 132 | 140 | 124 | 144 | 153 | 151 | 148 |
| | 116 | 130 | 154 | 158 | 102 | 125 | 124 | 152 | 134 | 148 |
| | 142 | 121 | 112 | 131 | 151 | 104 | 146 | 132 | 182 | 142 |
| | 152 | 196 | 142 | 154 | 158 | 118 | 126 | 152 | 138 | 124 |
| | 144 | 176 | 124 | 140 | 172 | 168 | 181 | 134 | 168 | 132 |
| | 144 | 112 | 134 | 162 | 104 | 161 | 154 | 166 | 178 | 148 |
| | 162 | 164 | 164 | 172 | 142 | 144 | 146 | 112 | 171 | |
| | 25 | 128 | 105 | 115 | 92 | 115 | 142 | 98 | 123 | 103 |
| 112 | | 115 | 88 | 118 | 103 | 102 | 95 | 124 | 106 | 135 |
| 95 | | 124 | 103 | 102 | 118 | 112 | 115 | 92 | 115 | 119 |
| 92 | | 112 | 132 | 85 | 122 | 105 | 125 | 142 | 99 | 125 |
| 106 | | 92 | 118 | 105 | 118 | 86 | 125 | 105 | 122 | 138 |
| 102 | | 130 | 112 | 98 | 115 | 120 | 118 | 103 | 118 | 129 |
| 103 | | 122 | 94 | 112 | 97 | 128 | 102 | 116 | 125 | 132 |
| 26 | | 102 | 112 | 118 | 85 | 112 | 115 | 103 | 95 | 122 |
| | 157 | 178 | 149 | 195 | 146 | 166 | 182 | 135 | 136 | 170 |
| | 157 | 143 | 179 | 165 | 159 | 149 | 141 | 102 | 169 | 168 |
| | 151 | 168 | 122 | 163 | 117 | 165 | 132 | 139 | 107 | 125 |
| | 152 | 152 | 142 | 132 | 152 | 161 | 148 | 136 | 138 | 149 |
| | 153 | 154 | 143 | 155 | 113 | 155 | 171 | 168 | 153 | 135 |
| | 157 | 152 | 145 | 198 | 192 | 143 | 159 | 116 | 126 | 155 |
| | 165 | 169 | 165 | 148 | 151 | 153 | 139 | 166 | 138 | 128 |
| 27 | 242 | 254 | 218 | 226 | 252 | 238 | 224 | 298 | 260 | 287 |
| | 250 | 216 | 230 | 254 | 258 | 202 | 225 | 224 | 252 | 234 |
| | 244 | 212 | 231 | 251 | 204 | 246 | 232 | 282 | 242 | 252 |
| | 299 | 254 | 282 | 242 | 270 | 254 | 260 | 232 | 268 | 242 |
| | 276 | 224 | 240 | 272 | 268 | 281 | 234 | 268 | 232 | 300 |
| | 274 | 212 | 234 | 262 | 204 | 261 | 254 | 266 | 278 | 248 |
| | 255 | 262 | 256 | 264 | 272 | 242 | 244 | 246 | 253 | 234 |
| | 240 | 264 | 252 | 248 | 247 | 268 | 229 | 235 | 262 | 212 |
| 28 | 262 | 267 | 275 | 266 | 246 | 252 | 261 | 269 | 262 | 268 |
| | 259 | 248 | 266 | 259 | 252 | 248 | 252 | 232 | 269 | 287 |
| | 253 | 286 | 275 | 235 | 202 | 239 | 225 | 236 | 237 | 224 |
| | 253 | 268 | 277 | 249 | 248 | 263 | 243 | 266 | 212 | 255 |
| | 249 | 288 | 213 | 264 | 247 | 242 | 228 | 277 | 256 | 251 |
| | 267 | 232 | 258 | 246 | 278 | 279 | 257 | 255 | 243 | 258 |
| | 254 | 244 | 265 | 274 | 252 | 265 | 222 | 269 | 254 | 278 |
| | 249 | 252 | 294 | 232 | 269 | 263 | 269 | 271 | 245 | 235 |

| | | | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|
| 29 | 558 | 565 | 587 | 553 | 548 | 554 | 561 | 564 | 562 | 544 |
| | 563 | 568 | 586 | 549 | 575 | 564 | 553 | 585 | 577 | 553 |
| | 563 | 564 | 547 | 552 | 562 | 554 | 549 | 575 | 558 | 592 |
| | 546 | 577 | 568 | 574 | 564 | 547 | 549 | 553 | 578 | 557 |
| | 557 | 577 | 568 | 574 | 564 | 547 | 549 | 538 | 575 | 566 |
| | 558 | 554 | 552 | 566 | 557 | 551 | 552 | 546 | 584 | 532 |
| | 602 | 561 | 552 | 551 | 561 | 538 | 533 | 547 | 552 | 557 |
| | 556 | 541 | 588 | 558 | 563 | 558 | 572 | 578 | 539 | 556 |
| 30 | 165 | 143 | 152 | 167 | 164 | 199 | 171 | 171 | 156 | 151 |
| | 155 | 155 | 158 | 145 | 158 | 177 | 161 | 181 | 153 | 171 |
| | 177 | 153 | 174 | 154 | 163 | 174 | 152 | 188 | 162 | 197 |
| | 191 | 158 | 154 | 171 | 163 | 172 | 152 | 178 | 151 | 172 |
| | 161 | 186 | 147 | 169 | 147 | 166 | 161 | 171 | 161 | 186 |
| | 161 | 189 | 199 | 162 | 167 | 198 | 168 | 135 | 152 | 146 |
| | 162 | 175 | 163 | 149 | 162 | 161 | 161 | 193 | 172 | 175 |
| | 153 | 164 | 178 | 138 | 164 | 172 | 187 | 178 | 1433 | 161 |

3. Егер таңдама ортасы \bar{x}_T , таңдама көлемі n және орта квадраттық ауытқуы σ болғанда, γ сенімділікпен қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын табу керек.

| | γ | \bar{x}_g | n | σ | | γ | \bar{x}_g | n | σ | | γ | \bar{x}_g | n | σ |
|------|----------|-------------|-----|----------|------|----------|-------------|-----|----------|------|----------|-------------|-----|----------|
| 3.1 | 0.95 | 75.17 | 36 | 6 | 3.11 | 0.97 | 5.21 | 46 | 6 | 3.21 | 0.92 | 11.48 | 36 | 6 |
| 3.2 | 0.97 | 7.27 | 56 | 7 | 3.12 | 0.96 | 55.23 | 38 | 5 | 3.22 | 0.94 | 23.38 | 39 | 8 |
| 3.3 | 0.93 | 75.17 | 35 | 5 | 3.13 | 0.92 | 5.21 | 36 | 7 | 3.23 | 0.93 | 30.44 | 56 | 7 |
| 3.4 | 0.94 | 8.27 | 58 | 9 | 3.14 | 0.95 | 55.23 | 68 | 7 | 3.24 | 0.99 | 15.32 | 38 | 5 |
| 3.5 | 0.98 | 76.17 | 46 | 6 | 3.15 | 0.98 | 7.21 | 56 | 6 | 3.25 | 0.95 | 10.48 | 46 | 6 |
| 3.6 | 0.99 | 7.37 | 58 | 7 | 3.16 | 0.93 | 65.23 | 78 | 5 | 3.26 | 0.98 | 13.38 | 39 | 8 |
| 3.7 | 0.93 | 65.13 | 34 | 6 | 3.17 | 0.92 | 8.21 | 49 | 7 | 3.27 | 0.93 | 20.44 | 66 | 7 |
| 3.8 | 0.94 | 9.27 | 53 | 8 | 3.18 | 0.95 | 51.23 | 58 | 9 | 3.28 | 0.97 | 14.32 | 58 | 6 |
| 3.9 | 0.93 | 85.17 | 35 | 6 | 3.19 | 0.94 | 5.21 | 39 | 6 | 3.29 | 0.94 | 30.44 | 86 | 7 |
| 3.10 | 0.95 | 8.27 | 57 | 9 | 3.20 | 0.95 | 85.23 | 58 | 7 | 3.30 | 0.99 | 16.32 | 38 | 9 |

2.3 Типтік варианттың шешуі

1. Берілген таңдама үшін өдеу және жүйелеу есептерін орындау керек, анықтау керек:

- вариациялық қатарды (өсу ретімен таңдаманы);
- жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды;

в) жиілік және қатысты жиілік интервалдық статистикалық қатарын (минималды және максималды варианттарды, таңдаманың құлашын, интервалдар санын, интервалдар ұзындығын);

г) дискретті (топталған) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды салу керек;

2. Берілген таңдама талдау және бағалау есептерін орындау керек, анықтау керек:

а) интервалдық статистикалық қатар бойынша жиілік және қатысты жиілік гистограммасын құру керек;

б) дискретті статистикалық қатар бойынша табу керек:

- жиілік және қатысты жиілік полигонын;
- үлестірімнің эмпирикалық функциясын;
- таңдама ортасын;
- таңдама және түзетілген таңдама дисперсиясын;
- түзетілген таңдама орта квадраттық ауытқуын;
- таңдама модасы мен медианасын;

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 20 | 15 | 17 | 19 | 23 | 18 | 21 | 15 | 16 | 13 |
| 20 | 16 | 19 | 20 | 14 | 20 | 16 | 14 | 20 | 19 |
| 15 | 19 | 17 | 16 | 15 | 22 | 21 | 12 | 10 | 21 |
| 18 | 14 | 14 | 18 | 18 | 13 | 19 | 18 | 20 | 23 |
| 16 | 20 | 19 | 17 | 19 | 17 | 21 | 17 | 19 | 17 |
| 13 | 17 | 11 | 18 | 19 | | | | | |

Шешуі: айта кетелік, есептеулер мен графиктер салу Mathcad-та жүргізіледі. Төменде Mathcad-та есептеулермен файлдың көшірмелері келтірілген. Mathcad-та алынған нәтижелерге түсініктеме беріп, ресімдеу керек.

а) таңдама көлемі $n = 55$. Вариациялық қатар (таңдама өсу ретімен алынған):

$$Y^T =$$

| | | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 10 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | ... |

(Mathcad-та кестені бағыттаушы бағытын басып көруге болады);

б) вариациялық қатар бойынша әрбір варианта қанша рет кездесетінін, яғни әрбір вариантының (n_i) жиілігін есептейміз. Алынған нәтижені кестеге – жиіліктің статистикалық қатарына енгіземіз:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| n_i | 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 7 | 6 | 8 | 7 | 5 | 1 | 2 |

Вариантаның қатысты жиілігін $p_i^* = \frac{n_i}{n}$ формуласы бойынша табамыз, мұндағы n таңдама көлемі. Алынған нәтижені кестеге – қатысты жиіліктің статистикалық қатарына енгіземіз:

| | | | | | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_i | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| p_i^* | 0,018 | 0,018 | 0,018 | 0,036 | 0,073 | 0,073 | 0,091 | 0,127 | 0,109 |
| x_i | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | | | | |
| p_i^* | 0,145 | 0,127 | 0,091 | 0,018 | 0,036 | | | | |

в) интервалдық статистикалық қатар құру үшін келесі шамаларды анықтау керек: ең үлкен және ең кіші варианттар: $a = x_{\min} = 10$, $b = x_{\max} = 23$; таңдама құлашы: $R = b - a = 13$; интервалдар санын Стерджес формуласымен анықтаймыз $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n}$, $h = 1,917$ және бүтін бөлікке дейін жуықтаймыз $h \approx 2$; интервалдар саны – формуланың бөлімі $m = 1 + \log_2 n$ немесе $m = \frac{R}{h} = 6,781$, бүтін бөлікке дейін жуықтаймыз $m \approx 7$; бірінші интервалдың басы ретінде $x_{\text{басм}} = x_{\min} - \frac{h}{2}$, $x_{\text{басм}} = 9,041 \approx 9$ шамасын алуды ұсынады; әрбір интервалға енген варианттар саны (яғни n_i (яғни $p_i = \frac{n_i}{n}$)) Mathcad-та есептелінген (қараңыз $w1^T$ және $w2^T$).

Сонымен, ізделінді интервалдық қатар:

| интервалдар | [9,11) | [11,13) | [13,15) | [15,17) | [17,19) | [19,21) | [21,23] |
|-----------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| n_i | 1 | 2 | 6 | 9 | 13 | 16 | 8 |
| $p_i = \frac{n_i}{n}$ | 0,018 | 0,036 | 0,109 | 0,164 | 0,236 | 0,291 | 0,145 |

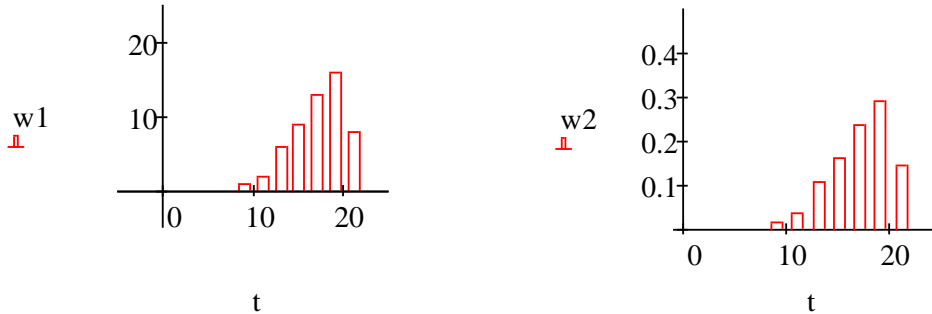
в) дискретті статистикалық қатарды құру үшін (кейбір оқулықтарда топталған статистикалық қатар деп атайды) интервалдар ортасын табамыз $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (Mathcad-та x^T қара), оларға интервалдық қатардың сәйкес жиілік және қатысты жиіліктері дәл келеді.

Ізделінді дискретті статистикалық қатар:

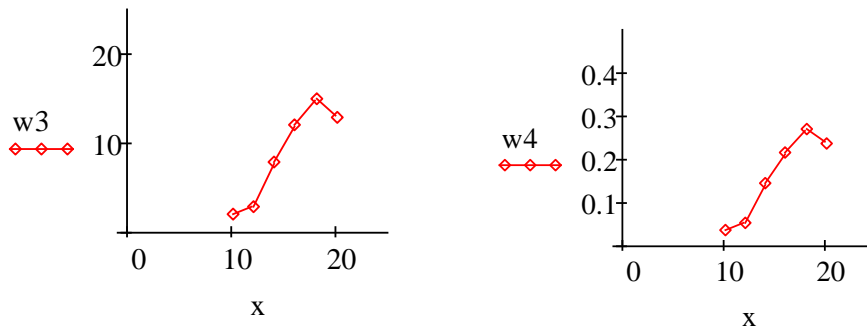
| | | | | | | | |
|---------------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 |
| n_i | 1 | 2 | 6 | 9 | 13 | 16 | 8 |

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| P_i | 0,018 | 0,036 | 0,109 | 0,164 | 0,236 | 0,291 | 0,145 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

2. а) интервалдық статистикалық қатар бойынша жиілік және қатысты жиіліктер гистограммасын құрамыз (Mathcad-та):

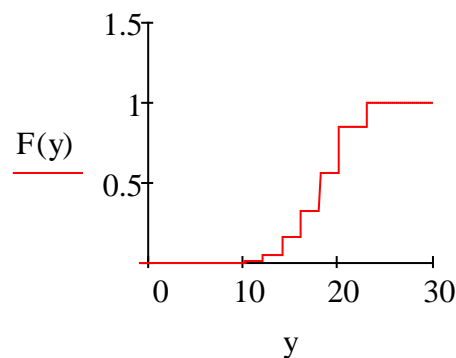


б) дискретті статистикалық қатар бойынша келесі шамаларды табамыз:
- жиілік және қатысты жиіліктер полигонын:



- үлестірімнің эмпирикалық функциясын (Mathcad-та F^T және $F(y)$ кара):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 10 \\ 0,018, & \text{егер } 10 < x \leq 12 \\ 0,054, & \text{егер } 12 < x \leq 14 \\ 0,163, & \text{егер } 14 < x \leq 16 \\ 0,327, & \text{егер } 16 < x \leq 18 \\ 0,563, & \text{егер } 18 < x \leq 20 \\ 0,854, & \text{егер } 20 < x \leq 23 \\ 1, & \text{егер } x > 23 \end{cases}$$



- таңдама ортасы (Mathcad-та mean(X)): $\bar{x}_e = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{n}$ немесе

$$\bar{x}_e = \sum_i x_i \cdot p_i = 17,564;$$

- таңдама дисперсиясы мен түзетілген таңдама дисперсиясы (Mathcad-та

$$\text{var}(X) \text{ және } s): D_e = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^2}{n} \text{ немесе } D_e = \frac{\sum n_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x}_e)^2 = 8,428 - \text{таңдама}$$

дисперсиясы; $s^2 = \frac{n}{n-1} D_e = 8,584 - \text{түзетілген таңдама дисперсиясы};$

- түзетілген таңдама орта квадраттық ауытқуы (Mathcad-та σ):

$$\sigma = \sqrt{s} = 2,93$$

- таңдама модасы мен медианасы (Mathcad-та mode(X) және median(X)): мода $M_0 = 19$ ең үлкен жиілігі бар вариантаны анықтайды;

медиана $M_e = 18$ вариациялық қатардың ортасын анықтады және таңдама

көлемінің жұптығына байланысты: $M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{егер } n = 2k + 1 \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, & \text{егер } n = 2k \end{cases}$

Mathcad-тан файл көшірмесі:

| | | | | | | | | | | | |
|---------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| $Y^T =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| | 0 | 10 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 14 | ... |

$n := 55$

$X := (20 \ 15 \ 17 \ 19 \ 23 \ 18 \ 21 \ 15 \ 16 \ 13 \ 20 \ 16 \ 19 \ 20 \ 14 \ 20 \ 16 \ 14 \ 20 \ 19$

$Y := \text{sort}(X^T)$

| | | | |
|---------|-----|---|--------------------|
| $X^T =$ | 0 | $a := \min(X)$ | $b := \max(X)$ |
| 0 | 20 | $a = 10$ | $b = 23$ |
| 1 | 15 | | |
| 2 | 17 | | |
| 3 | 19 | $R := b - a$ | $R = 13$ |
| 4 | 23 | $h := \frac{R}{1 + \frac{\ln(55)}{\ln(2)}}$ | $h = 1.917$ |
| 5 | 18 | | |
| 6 | 21 | | |
| 7 | 15 | $h1 := 2$ | $m := \frac{R}{h}$ |
| 8 | 16 | | |
| 9 | 13 | $x0 := a - \frac{h}{2}$ | $x0 = 9.041$ |
| 10 | 20 | | $m = 6.781$ |
| 11 | 16 | $a1 := 9$ | $m1 := 7$ |
| 12 | 19 | | |
| 13 | 20 | $j := 0..m1$ | $i := 0..m1 - 1$ |
| 14 | 14 | | |
| 15 | ... | | |

$$t_j := a_1 + h_1 \cdot j \quad x_i := t_i + \frac{h_1}{2}$$

$$w_1 := \text{hist}(t, X)$$

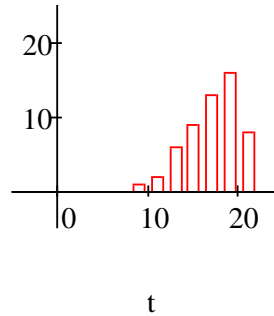
$$w_2 := \frac{w_1}{n}$$

$$t^T = (9 \ 11 \ 13 \ 15 \ 17 \ 19 \ 21 \ 23)$$

$$w_1^T = (1 \ 2 \ 6 \ 9 \ 13 \ 16 \ 8)$$

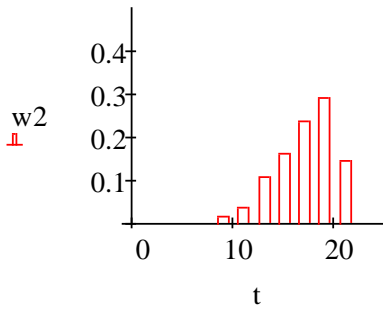
$$x^T = (10 \ 12 \ 14 \ 16 \ 18 \ 20 \ 22)$$

w1



$$w_2^T = (0.018 \ 0.036 \ 0.109 \ 0.164 \ 0.236 \ 0.291 \ 0.145)$$

$$0.018 + 0.036 + 0.109 + 0.164 + 0.236 + 0.291 + 0.145 = 0.999$$



$$\text{mode}(X) = 19$$

$$x_1 := \text{mean}(X) \quad x_1 = 17.564$$

$$M := \text{median}(X) \quad M = 18$$

$$x_2 := \text{var}(X)$$

$$s_2 := \frac{n}{n-1} \cdot x_2$$

$$x_2 = 8.428$$

$$\text{stdev}(X) = 2.903$$

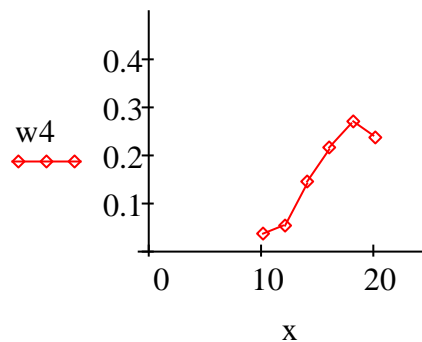
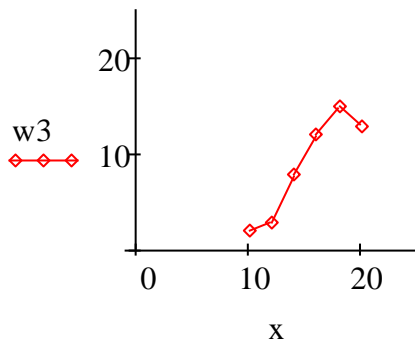
$$s_2 = 8.584$$

$$s := \sqrt{s_2}$$

$$s = 2.93$$

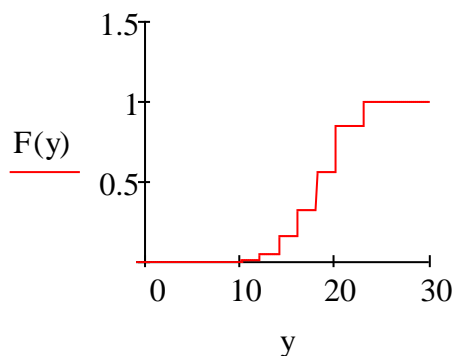
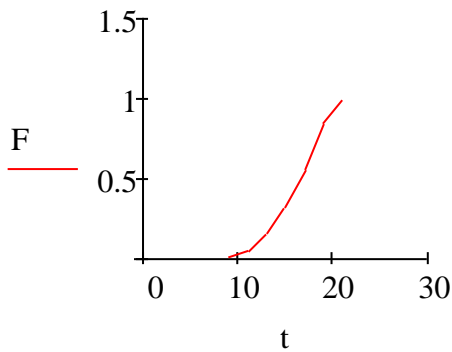
$$w_3 := \text{hist}(x, X)$$

$$w_4 := \frac{w_3}{n}$$



$$i := 0..6 \quad w := (0.018 \quad 0.036 \quad 0.109 \quad 0.164 \quad 0.236 \quad 0.291 \quad 0.145)^T$$

$$F_i := \sum_{j=0}^i w_j \quad F^T = (0.018 \quad 0.054 \quad 0.163 \quad 0.327 \quad 0.563 \quad 0.854 \quad 0.999)$$



$$F(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \leq 10 \\ 0.018 & \text{if } 10 < y \leq 12 \\ 0.054 & \text{if } 12 < y \leq 14 \\ 0.163 & \text{if } 14 < y \leq 16 \\ 0.327 & \text{if } 16 < y \leq 18 \\ 0.563 & \text{if } 18 < y \leq 20 \\ 0.854 & \text{if } 20 < y \leq 23 \\ 1 & \text{if } y > 23 \end{cases}$$

3. Егер таңдама ортасы 18, таңдама көлемі 25 және орта квадраттық ауытқуы 3 болғанда, 0,95 сенімділікпен қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын табу керек.

Шешуі: a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалы келесі түрде беріледі $\bar{x}_e - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. t -дан басқа шамалар белгілі. t -

ны $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$ қатынасынан табамыз, мұндағы $\Phi(t)$ - Лаплас функциясы, оның мәні кестеден алынады. Кестеден $t = 1,96$. Олай болса, $18 - 1,96 \frac{3}{\sqrt{25}} < a < 18 + 1,96 \frac{3}{\sqrt{25}}$. Жауабы: (16,824; 19,176).

Әдебиеттер тізімі

1 Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. -Алматы. 2006 – 184 бет.

2 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. – Алматы, 2011.

3 Мұстахишев К.М., Ералиев С.Е., Атабай Б.Ж. Математика (толық курс). -Алматы, 2009. -358 бет.

4 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы. – Алматы, 2005.

5 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. 5В070400 – Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету, 5В070300 – Ақпараттар жүйесі мамандықтарының студенттері үшін дәрістер жинағы. - Алматы: АЭЖБУ, 2013.- 49 б.

Мазмұны

| | |
|---|----|
| 1 Есептік-сызба жұмыс №1. Ықтималдық теориясы элементтері | 3 |
| 1.2 Есептік тапсырмалар | 4 |
| 1.3 Типтік нұсқаның шешуі | 12 |
| 2 Есептік-сызба жұмыс №2. Математикалық статистика элементтері..... | 30 |
| 2.2 Есептік тапсырмалар | 31 |
| 2.3 Типтік нұсқаның шешуі | 37 |
| Әдебиеттер тізімі..... | 44 |

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Мәншүк Жұмамұратқызы

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

5B070200 -Автоматтандыру және басқару мамандығы бойынша оқитын
студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға
арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар

Редактор Ж.Н.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Н.Қ.Молдабекова

Басуға _____ қол қойылды
Таралымы 70 дана
Көлемі 2,75 баспа табак

Пішімі 60x84 1/16
Баспаханалық қағаз №1
Тапсырыс Бағасы 1375 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013 Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126

